

Одобрено организационно-методическим советом ГБУ ВО РИАЦОКО
(протокол № 37 от 02.10.2023г.)

Составители:

Сидорова И.В., кандидат физико-математических наук, заведующий кафедрой информационных технологий ВФ РАНХиГС;

Антонова Е.И., кандидат педагогических наук, заведующий кафедрой естественно-математического образования ГАОУДПО ВО ВИРО;

Жукова А.А., кандидат физико-математических наук, доцент кафедры информационных технологий ВФ РАНХиГС;

Данилов В.В., заместитель директора ГБУ ВО РИАЦОКО.

Ответственный редактор:

Мансурова С.И., директор государственного бюджетного учреждения Владимирской области «Региональный информационно-аналитический центр оценки качества образования».

Предлагаемый сборник содержит статистический анализ результатов ЕГЭ и ОГЭ по математике в 2023 году во Владимирской области и рекомендации по подготовке к экзамену.

В рекомендациях приведен анализ типичных ошибок участников ЕГЭ (профильный и базовый уровни) и ОГЭ по математике. Подробно представлены методические рекомендации по выполнению заданий с развернутым ответом Части 2, а также рассмотрены критерии оценки заданий.

Материалы пособия педагоги могут использовать для организации и проведения текущего и итогового контроля качества знаний учащихся в период подготовки их к итоговой аттестации в формате ЕГЭ и ОГЭ.

Сборник материалов предназначен для руководителей, заместителей руководителей, учителей математики общеобразовательных организаций, реализующих ФГОС общего образования.

УДК 372.016:51

ББК 22.2в04:74.202.8

ISBN 978-5-6050578-9-5

© Сидорова И.В., Антонова Е.И., Жукова А.А.,
Мансурова С.И., Данилов В.В., 2023

© ГБУ ВО РИАЦОКО, 2023

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	4
ЧАСТЬ I. ИТОГИ ЕГЭ ПО МАТЕМАТИКЕ (БАЗОВЫЙ УРОВЕНЬ) ВО ВЛАДИМИРСКОЙ ОБЛАСТИ В 2023 ГОДУ.....	5
1.1. Характеристика участников ЕГЭ по математике.....	5
1.2. Основные результаты ЕГЭ по математике (базовый уровень).....	7
1.3. Анализ типичных ошибок участников ЕГЭ по математике базового уровня.....	9
1.4. Рекомендации по совершенствованию организации и методики преподавания математики на основе выявленных типичных затруднений и ошибок ЕГЭ (базовый уровень).....	17
ЧАСТЬ II. ИТОГИ ЕГЭ ПО МАТЕМАТИКЕ (ПРОФИЛЬНЫЙ УРОВЕНЬ) ВО ВЛАДИМИРСКОЙ ОБЛАСТИ В 2023 ГОДУ.....	20
2.1. Характеристика участников ЕГЭ по математике.....	20
2.2. Основные результаты ЕГЭ по математике (профильный уровень).....	24
2.3. Анализ типичных ошибок участников ЕГЭ по математике (профильный уровень).....	29
2.4. Методические рекомендации по выполнению заданий с развернутым ответом ЕГЭ (профильный уровень).....	42
2.5. Рекомендации по совершенствованию организации и методики преподавания предмета на основе выявленных типичных затруднений и ошибок ЕГЭ по математике (профильный уровень).....	58
ЧАСТЬ III. ИТОГИ ОГЭ ПО МАТЕМАТИКЕ ВО ВЛАДИМИРСКОЙ ОБЛАСТИ В 2023 ГОДУ.....	64
3.1. Основные результаты ОГЭ по математике	64
3.2. Анализ типичных ошибок участников ОГЭ по математике	71
3.3. Методические рекомендации по выполнению заданий с развернутым ответом ОГЭ.....	80
3.4. Рекомендации по совершенствованию организации и методики преподавания предмета в основной школе.....	84
ЧАСТЬ IV. МЕРЫ МЕТОДИЧЕСКОЙ ПОДДЕРЖКИ УЧИТЕЛЯ МАТЕМАТИКИ	89
4.1. Дорожная карта по развитию региональной системы образования на 2023-2024 учебный год	89

Перечень условных обозначений, сокращений и терминов

АТЕ	Административно-территориальная единица
ГИА	Государственная итоговая аттестация по образовательным программам общего образования
ЕГЭ	Единый государственный экзамен
ОГЭ	Обязательный государственный экзамен
КИМ	Контрольные измерительные материалы
ОО	Образовательная организация, осуществляющая образовательную деятельность по имеющей государственную аккредитацию образовательной программе
СОШ	Средняя образовательная школа, осуществляющая образовательную деятельность по имеющей государственную аккредитацию образовательной программе
СПО	Образовательная организация среднего профессионального образования, осуществляющая образовательную деятельность по имеющей государственную аккредитацию образовательной программе
РИС	Региональная информационная система обеспечения проведения государственной итоговой аттестации обучающихся, освоивших основные образовательные программы основного общего и среднего общего образования
Участник ЕГЭ (ОГЭ) /участник экзамена / участник	Обучающиеся, допущенные в установленном порядке к ГИА в форме ЕГЭ (ОГЭ), выпускники прошлых лет, допущенные в установленном порядке к сдаче экзамена

ВВЕДЕНИЕ

Единый государственный экзамен (ЕГЭ) — это форма государственной итоговой аттестации (ГИА) по образовательным программам среднего общего образования. ЕГЭ по математике разделен на два уровня – базовый и профильный. Два уровня государственной итоговой аттестации по математике позволяют выпускникам с разным уровнем математической подготовки более полно реализовать свои возможности. ЕГЭ по математике на профильном уровне проводится для тех участников, которым его результаты нужны для поступления в вуз.

Обязательный государственный экзамен (ОГЭ) — это форма государственной итоговой аттестации (ГИА) по образовательным программам основного общего образования.

При проведении ЕГЭ (ОГЭ) используются контрольные измерительные материалы (КИМ), представляющие собой комплексы заданий стандартизированной формы. Для оформления ответов на задания КИМ используются специальные бланки. ГИА организуется и проводится Федеральной службой по надзору в сфере образования и науки (Рособрнадзором) совместно с органами исполнительной власти субъектов Российской Федерации, осуществляющими государственное управление в сфере образования.

С целью подготовки учащихся к итоговой аттестации рекомендуется использовать:

- «Открытый банк заданий ЕГЭ. Математика» и «Открытый банк заданий ОГЭ. Математика», созданные авторским коллективом ФИПИ: <http://www.fipi.ru/>;
- банк заданий по формированию математической грамотности ИСРО РАО <http://skiv.instrao.ru/bank-zadaniy/matematicheskaya-gramotnost/>.

Ознакомление обучающихся с видеоконсультациями Рособрнадзора и с ресурсом «Навигатор подготовки к ОГЭ, ЕГЭ» <http://www.fipi.ru/navigator-podgotovki>.

Для проведения тематического и итогового контроля за качеством математической подготовки учащихся, необходимо использовать такие формы контроля знаний учащихся как задания с кратким ответом и задания с развернутым решением. Демонстрационные варианты по математике размещены на сайте ФИПИ: <http://www.fipi.ru/>. Диагностические и тренировочные работы по математике представлены на сайте СтатГрад: <https://statgrad.org/>.

**ЧАСТЬ I. ИТОГИ ЕГЭ ПО МАТЕМАТИКЕ (БАЗОВЫЙ УРОВЕНЬ)
ВО ВЛАДИМИРСКОЙ ОБЛАСТИ В 2023 ГОДУ**

1.1. Характеристика участников ЕГЭ по математике

1. Количество¹ участников ЕГЭ по математике базового уровня

Таблица 1-1

2019 г.		2022 г.		2023 г.	
чел.	% от общего числа участников	чел.	% от общего числа участников	чел.	% от общего числа участников
0	0,00	2748	50,52	2788	53,16

2. Процентное соотношение юношей и девушек, участвующих в ЕГЭ

Таблица 1-2

Пол	2019 г.		2022 г.		2023 г.	
	чел.	% от общего числа участников	чел.	% от общего числа участников	чел.	% от общего числа участников
Женский			1901	69,15	1848	66,26
Мужской			847	30,81	940	33,70

3. Количество участников ЕГЭ в регионе по категориям

Таблица 1-3

Всего участников ЕГЭ по предмету	2788
Из них:	2782
– ВТГ, обучающихся по программам СОО	5
– ВТГ, обучающихся по программам СПО	1
– Обучающихся общеобразовательной организации, завершивший освоение образовательной программы по учебному предмету	32
– Участников с ограниченными возможностями здоровья	

4. Количество участников ЕГЭ по типам² ОО

Таблица 1-4

Всего ВТГ	2782
Из них:	266
– выпускники гимназий	11
– выпускники кадетской школы-интерната	128
– выпускники лицеев	29
– выпускники открытой (сменной) общеобразовательной школы	2207
– выпускники СОШ	141
– выпускники СОШ с углублённым изучением отдельных предметов	

5. Количество участников ЕГЭ по предмету по АТЕ региона

¹ Количество участников основного периода проведения ГИА

² Перечень категорий ОО может быть уточнен / дополнен с учетом специфики региональной системы образования

Таблица 1-5

№ п/п	АТЕ	Количество участников ЕГЭ по учебному предмету	% от общего числа участников в регионе
1.	Александровский район	333	11,94
2.	Вязниковский район	120	4,30
3.	г.Владимир	877	31,46
4.	г.Гусь-Хрустальный	98	3,52
5.	г.Ковров	275	9,86
6.	г.Радужный	37	1,33
7.	Гороховецкий район	43	1,54
8.	Гусь-Хрустальный район	67	2,40
9.	Камешковский район	24	0,86
10.	Киржачский район	96	3,44
11.	Ковровский район	23	0,82
12.	Кольчугинский район	109	3,91
13.	Меленковский район	58	2,08
14.	Муромский район	39	1,40
15.	о.Муром	245	8,79
16.	Петушинский район	110	3,95
17.	Селивановский район	17	0,61
18.	Собинский район	48	1,72
19.	Судогодский район	70	2,51
20.	Суздальский район	67	2,40
21.	Юрьев-польский район	32	1,15

ВЫВОДЫ о характере изменения количества участников ЕГЭ по учебному предмету

В экзамене по математике базового уровня в 2023 году приняли участие 2788 чел., что составляет 53,1% от общего числа участников. Доля участников экзамена по сравнению с 2022 годом незначительно возросла (2022 год – 50,5%). На протяжении последних двух лет лидируют в количественном рейтинге участников, сдававших базовую математику, участники из крупных городов области – г. Владимир (877 чел. - 31,5%), г. Ковров (275 - 9,9%), о. Муром (245 - 8,8%).

К числу муниципальных образований региона, в которых отмечается наименьшее количество участников ЕГЭ по базовой математике на протяжении нескольких лет, относятся Селивановский район (2022 год – 0,8%, 2023 – 0,6%); Ковровский район (2022 год – 0,9%, 2023 – 0,8%).

По гендерному признаку по данным направлениям подготовки имеется значительное превышение количества девушек над юношами. Количество девушек, выбравших экзамен, в 2 раза превышает количество юношей.

В 2023 году наблюдается незначительное снижение доли обучающихся с ограниченными возможностями здоровья: 2022 год – 1,3%, 2023 – 1,1%.

Среди участников экзамена (ВТГ) преобладают выпускники средних общеобразовательных школ: в 2023 году количество таких участников составило 2207 чел. (79,3%) (2022 год – 2159 (78,6%)). Незначительно (на 1,1%) увеличился показатель доли выпускников гимназий и лицеев - 14,2% (2022 год - 13,1%). Также незначительно (на

0,9%) увеличился показатель доли выпускников СОШ с углубленным изучением отдельных предметов – 5,1% (2022 год – 4,2%).

Таким образом, на основании количественной характеристики состава участников ЕГЭ по математике базового уровня, можно сделать вывод о том, что наблюдается общая разнонаправленная динамика количественных показателей в 2023 году. Изменение числа участников ЕГЭ по АТЕ происходит, в основном, под влиянием демографической ситуации.

1.2. Основные результаты ЕГЭ по математике (базовый уровень)

1. Диаграмма распределения тестовых баллов участников ЕГЭ по предмету в 2023 г. (количество участников, получивших тот или иной первичный балл, оценку)



2. Динамика результатов ЕГЭ по предмету за последние 3 года

Таблица 1-6

Участников, набравших балл	Владимирская область		
	2019 г.	2022 г.	2023 г.
ниже минимального балла ³ («2»), %	2,29	1,60	2,22
«3», %	18,89	17,61	21,63
«4», %	41,09	36,28	43,76
«5», %	37,73	44,51	32,39

3. Результаты ЕГЭ по предмету по группам участников экзамена с различным уровнем подготовки:

А) в разрезе типа⁴ ОО

Таблица 1-7

	Количество участников экзамена, чел.	Доля участников, получивших тестовый балл			
		«2»	«3»	«4»	«5»
Гимназия	267	0,75	14,23	38,58	46,44
Кадетская школа-интернат	11	0,00	36,36	36,36	27,27

³ Здесь и далее: минимальный балл – установленное Рособрнадзором минимальное количество баллов ЕГЭ, подтверждающее освоение образовательной программы среднего общего образования (по учебному предмету «математика (базовый уровень)» для анализа берется минимальный балл «3»).

⁴ Перечень категорий ОО дополняется / уточняется в соответствии со спецификой региональной системы образования

Лицей	128	0,78	17,19	39,84	42,19
Открытая (сменная) общеобразовательная школа	30	13,33	43,33	36,67	6,67
СОШ	2210	2,40	22,26	44,71	30,63
СОШ с углубленным изучением отдельных предметов	142	1,41	23,94	44,37	30,28

Б) основные результаты ЕГЭ по предмету в сравнении по АТЕ

Таблица 1-8

Наименование АТЕ	Количество участников экзамена, чел.	Доля участников, получивших тестовый балл			
		«2»	«3»	«4»	«5»
Александровский район	333	4,50	33,03	39,04	23,42
Вязниковский район	120	0,83	18,33	41,67	39,17
г.Владимир	877	1,48	17,90	43,67	36,94
г.Гусь-Хрустальный	98	1,02	16,33	44,90	37,76
г.Ковров	275	2,55	16,00	45,09	36,36
г.Радужный	37	0,00	24,32	37,84	37,84
Гороховецкий район	43	0,00	30,23	41,86	27,91
Гусь-Хрустальный район	67	7,46	29,85	43,28	19,40
Камешковский район	24	0,00	29,17	58,33	12,50
Киржачский район	96	1,04	25,00	48,96	25,00
Ковровский район	23	0,00	26,09	26,09	47,83
Кольчугинский район	109	0,92	17,43	48,62	33,03
Меленковский район	58	3,45	31,03	44,83	20,69
Муромский район	39	0,00	30,77	51,28	17,95
о. Муром	245	2,86	18,78	46,94	31,43
Петушинский район	110	2,73	29,09	38,18	30,00
Селивановский район	17	0,00	17,65	41,18	41,18
Собинский район	48	4,17	6,25	60,42	29,17
Судогодский район	70	1,43	28,57	42,86	27,14
Суздальский район	67	4,48	25,37	40,30	29,85
Юрьев-польский район	32	0,00	15,63	37,50	46,88

ВЫВОДЫ о характере изменения результатов ЕГЭ по математике на базовом уровне

Результаты ЕГЭ 2023 года относительно результатов ЕГЭ 2022 года по математике базового уровня показывают незначительное снижение показателей:

- средний балл (по пятибалльной шкале) в 2023 году составил 4,06, что ниже результата 2022 года на 0,18 (в 2022 году средний балл составил 4,24, и это был результат выше, чем в предыдущие годы);

- количество участников, не сдавших ЕГЭ по математике на базовом уровне (не преодолели минимального порога) в 2023 году увеличилось на 0,6% (с 1,6% в 2022 году до 2,2% в 2023 году).

Наибольшее количество участников, не преодолевших минимальный порог в Гусь-Хрустальном (7,45%), Александровском (4,5%), Суздальском (4,48%), Собинском (4,17%), Меленковском (3,45%) районах.

Из образовательных организаций низкие показатели оказались в следующих образовательных организациях, в которых экзаменуемые не преодолели минимальный порог и получили отметку «2»: СОШ №3 (20%), СОШ №5 г. Коврова (17,24%),

Краснопламенная СОШ №34 (16,67%), «Открытая (сменная) общеобразовательная школа» и СОШ №4 г.Александрова (13,33%). Это говорит о том, что в данных организациях не в полной мере была организована предметная подготовка учащихся к ГИА или не оказана психологическая поддержка слабо мотивированным обучающимся.

Отметим, что в 43 образовательных организациях региона обучающиеся продемонстрировали наиболее высокие результаты ЕГЭ по базовой математике. Наиболее высокий уровень по предмету показывают образовательные организации, где обучающиеся полностью справились с экзаменационной работой и получили высокие отметки «4» или «5»:

1. МБОУ СОШ № 40 г. Владимира;
2. МБОУ СОШ № 6 г. Владимира;
3. МАОУ Гимназия № 35 г. Владимира;
4. МБОУ СОШ № 31 г. Владимира;
5. МБОУ СОШ № 7 г. Киржач;
6. МБОУ СОШ № 9 г. Владимира;
7. МБОУ СОШ № 19 г. Владимира;
8. МБОУ СОШ № 11 г. Коврова;
9. МБОУ СОШ №2 г. Киржач.

Эти результаты можно аргументировать постоянной работой педагогов по совершенствованию методики подготовки учащихся к ГИА, посещением курсов повышения квалификации по проблемам подготовки учащихся к итоговой аттестации, участием в вебинарах, круглых столах, качественной работой методических объединений и ресурсных центров в муниципалитетах.

1.3. Анализ типичных ошибок участников ЕГЭ по математике базового уровня

1. Контрольно-измерительные материалы (КИМ) единого государственного экзамена по математике (базовый уровень) представляют собой набор заданий стандартизированной формы, которые соответствуют спецификации к демонстрационному варианту. Содержание КИМ ЕГЭ определяется на основе федерального государственного образовательного стандарта среднего общего образования (ФГОС) (приказ Министерства образования и науки Российской Федерации от 17.05.2012 № 413 с изменениями, внесёнными приказами Министерства образования и науки Российской Федерации от 29.12.2014 №1645, от 31.12.2015 № 1578, от 29.06.2017 № 613, приказами Министерства просвещения Российской Федерации от 24.09.2020 № 519, от 11.12.2020 № 712) с учётом примерной основной образовательной программы среднего общего образования (одобрена решением федерального учебно-методического объединения по общему образованию (протокол от 28.06.2016 № 2/16з)).

Варианты КИМ составлены на основе спецификации и кодификаторов проверяемых элементов содержания и требований к уровню подготовки выпускников общеобразовательных организаций.

Изменения в содержании КИМ ЕГЭ по математике базового уровня 2023 года в сравнении с КИМ 2022 года отсутствуют.

Однако в структуру КИМ 2023 года внесены изменения, позволяющие участнику экзамена более эффективно организовать работу над заданиями за счёт перегруппировки заданий по тематическим блокам. В начале работы собраны практико-ориентированные задания, позволяющие продемонстрировать умение применять полученные знания из различных разделов математики при решении практических задач, затем следуют блоки заданий по геометрии, по алгебре и началам математического анализа, которые представлены в спецификации КИМ на сайте ФИПИ <http://www.fipi.ru/>.

В 2020 и 2021 годах ЕГЭ базового уровня не проводился в связи с эпидемиологической обстановкой в России.

Распределение заданий КИМ по содержанию, видам умений, уровню сложности и среднему проценту выполнения по региону, представлены в таблице:

Таблица 1-9

№ задания в КИМ	Проверяемые элементы содержания /умения	Уровень сложности задания	Процент выполнения заданий					
			Средний % выполнения по всем вариантам, использованным в регионе	Группа не преодол. мин. балл (%)	Группа от мин. балл-60 (%)	Группа 61-80 (%)	Группа 81-100 (%)	Средний % вып. по открытому варианту №313
1	1.4.1 Уметь выполнять вычисления и преобразования	Б	87	46	79	89	95	82
2	2.1.12 Уметь использовать приобретённые знания и умения в практической деятельности и повседневной жизни	Б	91	73	86	90	96	96
3	3.1.3, 6.2.1 Уметь использовать приобретённые знания и умения в практической деятельности и повседневной жизни	Б	97	71	94	99	100	100
4	3.1.3 Уметь использовать приобретённые знания и умения в практической деятельности и повседневной жизни	Б	89	21	75	95	99	94
5	6.3.1 Уметь строить и исследовать простейшие математические модели	Б	71	13	37	75	97	78
6	1.4.1 Уметь строить и исследовать простейшие математические модели	Б	95	69	91	96	99	96
7	3.1.3, 6.2.1 Уметь выполнять действия с функциями	Б	93	50	86	96	100	97
8	2.1.12 Уметь строить и исследовать простейшие математические модели	Б	83	31	71	86	94	74
9	5.1.1 Уметь выполнять действия с геометрическими фигурами	Б	79	18	53	85	97	81
10	5.1.2 Уметь выполнять действия с геометрическими фигурами	Б	78	15	56	82	97	85

11	5.3.2 Уметь выполнять действия с геометрическими фигурами	Б	43	2	8	38	80	50
12	5.5.3 Уметь выполнять действия с геометрическими фигурами	Б	64	8	23	66	97	73
13	5.5.7 Уметь выполнять действия с геометрическими фигурами	Б	63	4	16	67	97	73
14	1.4.1 Уметь выполнять вычисления и преобразования	Б	61	9	26	62	90	74
15	1.1.3 Уметь использовать приобретённые знания и умения в практической деятельности и повседневной жизни	Б	82	6	54	91	99	84
16	1.4.3 Уметь выполнять вычисления и преобразования	Б	70	5	35	75	96	75
17	2.1.6 Уметь решать уравнения и неравенства	Б	46	6	15	36	85	47
18	2.2.1, 2.2.9 Уметь решать уравнения и неравенства	Б	33	5	10	21	68	38
19	1.4.1 Уметь выполнять вычисления и преобразования	Б	55	2	20	53	88	69
20	1.1.3 Уметь строить и исследовать простейшие математические модели	Б	18	1	4	6	46	23
21	1.1.1, 1.4.1 Уметь строить и исследовать простейшие математические модели	Б	15	3	4	9	34	19

Анализ заданий базового уровня с кратким ответом показывает, что выпускники достаточно успешно справились с заданиями 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 15 (процент выполнения данных заданий по всем вариантам, используемых в регионе от 82% до 97% и по открытому варианту от 74% до 100%). Обучающиеся владеют базовыми алгоритмами, математическими понятиями, методами решения простейших текстовых задач (задание 1) и задач с практическим содержанием (задания 2, 3, 4, 15), умеют строить и исследовать простейшие математические модели (задание 6), умеют читать и анализировать графики (задания 7), выбирать верные утверждения при указанных условиях (задание 8).

Достаточно хорошо (от 50% до 80%) обучающиеся справились со следующими заданиями 5, 9, 10, 12, 13, 14, 16, 19 (процент выполнения данных заданий по всем вариантам, используемых в регионе от 55% до 79% и по открытому варианту от 69% до 85%). При выполнении данных заданий выпускники продемонстрировали умение строить и исследовать простейшие математические модели (задание 5), умение выполнять действия с геометрическими фигурами (задания 9, 10, 12 и 13), умение выполнять вычисление и преобразования (задания 14, 16 и 19).

Наибольшие затруднения возникли у обучающихся при выполнении заданий 11, 17, 18, 20, 21 (процент выполнения данных заданий по всем вариантам, используемых в регионе от 15% до 46% и по открытому варианту от 19% до 50%). Данные задания, связанные с умением решать уравнения неравенства (задания 17, 18), умением строить и исследовать простейшие математические модели (задания 20 и 21), а также умением выполнять действия с геометрическими фигурами (задание 11).

Содержательный анализ выполнения заданий КИМ по математике на базовом уровне пошел на основании результатов, полученных экзаменуемыми в 2019, 2022, 2023 г. г. А также учитывались изменения в структуре КИМ 2023.

Анализ выполнения заданий с кратким ответом проведен по проверяемым умениям открытого варианта.

Задания 2, 3, 4 и 15 проверяли умения использовать приобретенные знания и умения в практической деятельности и повседневной жизни.

Процент выполнивших задание верно

Задание / Год	2019	2022	2023
Задание 2	97%	98%	96%
Задание 3	97%	96%	100%
Задание 4	63%	82%	94%
Задание 15	93%	88%	84%

Примечание: задание 2 (2023 г.) аналогично заданию 3 (2022 г.) и заданию 9 (2019 г.); задание 3 (2023 г.) аналогично заданию 4 (2022 г.) и заданию 11 (2019 г.); задание 4 (2023 г.) аналогично заданию 8 (2022 г.) и заданию 4 (2019г.), задание 15 (2023 г.) аналогично заданию 6 (2022 г.) и 10 (2019 г.).

Анализ выполнения заданий показывает, что прослеживается положительная динамика при выполнении задания 4 (работа с формулой) от 63% до 94%. Стабильный результат выполнения задания 2 (установление соответствия между величинами и их возможными значениями) и задания 3 (работа с рисунком). Ниже оказался результат выполнения задания 15 (текстовая задача на проценты), о чем свидетельствует наметившаяся тенденция снижения показателей с 93% до 84% на протяжении последних трех лет.

При выполнении заданий, рассматриваемого типа, допускались ошибки, в первую очередь, связанные с невнимательностью при чтении условия задач, а также вычислительные ошибки. Помимо, перечисленных общих ошибок, учащиеся при выполнении задания 2 ошибались в подборе соответствующих элементов; в задании 3 – при работе с рисунком по определению суточного количества осадков за данный период; в задании 15 – в нахождении процента от числа; в задании 4 – при преобразовании буквенного выражения.

Задания 1, 14, 16, 19 проверяли умения выполнять вычисления и преобразования. В заданиях 14 и 16 необходимо найти значения выражения, в задании 1 - решить текстовую задачу, определив, какое наибольшее число шоколадок можно получить на 150 рублей в воскресенье (в супермаркете действует специальное предложение), а в задании 19 – указать какую-нибудь сумму, которая делится на 10. Для выполнения задания 19 необходимо уметь выполнять вычисления и преобразования, используя свойства чисел, делимость, кратность, перебор, где необходимо учитывать совокупность всех условий для нахождения исходного числа.

Процент выполнивших задание верно

Задание / Год	2019	2022	2023
Задание 1	89%	92%	82%
Задание 14	85%	70%	74%

Задание 16	83%	77%	75%
Задание 19	69%	44%	69%

Примечание: задание 1 (2023 г.) аналогично заданию 2 (2022 г.) и заданию 3 (2019 г.), задание 14 (2023 г.) аналогично заданию 1 (2022 г. и 2019 г.), задание 16 (2023 г.) аналогично заданию 7 (2022 г.) и заданию 2 (2019 г.), задание 19 соответствуют КИМ прошлых лет.

Анализ выполнения заданий показывает, что результат выполнения задания 1 (решение текстовой задачи) и 16 (нахождение значения выражения, используя формулу квадрата суммы) оказался ниже с предыдущими годами. В задании 14 обучающиеся допускали ошибки при выполнении действий с обыкновенными дробями и десятичными дробями и в задании 19 ошибки в преобразовании выражения, включающих арифметические операции, а также и вычислительные ошибки. Следует отметить, что процент выполнивших верно задания 14 и 19 оказался выше, чем в 2022 году.

Задания 9, 10, 11, 12, 13 проверяли умения выполнять действия с геометрическими фигурами.

Процент выполнивших задание верно

Задание / Год	2019	2022	2023
Задание 9	-	68%	81%
Задание 10	76%	91%	85%
Задание 11	32%	51%	50%
Задание 12	48%	69%	73%
Задание 13	67%	52%	73%

Примечание: задание 9 (2023 г.) аналогично заданию 5 (2022 г.), а в 2019 г. такой вид заданий отсутствовал в КИМ; задание 10 (2023 г.) соответствуют аналогичным заданиям прошлых лет; задания 11, 12 и 13 (2023 г.) соответствовали заданиям 13, 15 и 16 (2022 и 2019 г.г.).

Анализ выполнения заданий показывает, что прослеживается положительная динамика при выполнении заданий 9 и 12 (соответственно от 68% до 81% и от 48% до 73%). Стабильным является выполнение задания 11 (50% верно выполнивших). Ниже оказался результат выполнения стереометрической задачи 10 (в сравнении с 2022 г. результат оказался ниже на 6%).

Типичные ошибки при выполнении геометрических заданий связаны с вычислительными ошибками, а также невнимательным чтением условия задач и работы с рисунками (задания 10 и 12), неумением находить площадь участка, используя клетчатую бумагу (задание 9), незнанием формулы объема параллелепипеда (задание 11) и объема конуса (задание 13).

Задания 5, 6, 8, 20 и 21 проверяли умения строить и исследовать простейшие математические модели.

Процент выполнивших задание верно

Задание / Год	2019	2022	2023
Задание 5	63%	71%	78%
Задание 6	75%	97%	96%
Задание 8	96%	99%	74%
Задание 20	-	40%	23%
Задание 21	21%	10%	19%

Примечание: задание 5 (2023 г.) аналогично заданию 11 (2022 г.) и заданию 10 (2019 г.); задание 8 (2023 г.) аналогично заданию 12 КИМ прошлых лет; задание 20 новое

задание добавлено в КИМ с 2022 г.; а задание 21 (2023 г.) аналогично заданию 21 (2022 г.) и заданию 20 (2019 г.).

Анализ выполнения заданий показывает, что прослеживается положительная динамика при выполнении задания 5 (нахождение вероятности события) от 63% до 78%. Ошибки при выполнении данного задания заключаются в неверном применении формулы для вычисления вероятности события.

Стабильно высокий результат, в рассматриваемый период, показывают учащиеся при выполнении задания 6 (выбор наименьшей стоимости товара).

Ниже оказался результат выполнения задания 8 (74% в 2023 г, а в предыдущие годы, процент выполнения такого типа задания составлял от 96% до 99%).

Задание № 20 (текстовая задача на процентное содержание). Новый тип заданий с 2022 г. Выполнили всего 23 % экзаменуемых, что ниже, чем в 2022 г. (выполнили 40% экзаменуемых). Допускались ошибки в построении математической модели по условию задачи, в анализе условий данной задачи, в выборе и записи ответа.

Задание 21 (логическая текстовая задача). Процент выполнения данной задачи в 2023 г. увеличился по сравнению с предыдущим годом с 10% до 19%, соответственно. Показатели выполнения задания остаются очень низкими за рассматриваемый период, что свидетельствует о недостаточной подготовке учащихся, неспособности понимать условия и решать логические задачи.

Задания 17 и 18 проверяли умения решать уравнения или неравенства.

Процент выполнивших задание верно

Задание / Год	2019	2022	2023
Задание 17	53%	75%	47%
Задание 18	71%	82%	38%

Примечание: задание 17 (2023 г.) аналогично заданию 9 (2022 г.) и заданию 7 (2019 г.); задание 18 аналогично заданию 17 КИМ прошлых лет.

Анализ выполнения задания 17 показывает, что только 47% выпускников справились с решением простейшего логарифмического уравнения. Процент выполнения данного задания был выше в как 2022 г. (75%), так и в 2019 г. (53%). Ошибки связаны с незнанием алгоритма решения логарифмического уравнения, отбором корней с учетом ОДЗ, а также вычислительными ошибками.

Низкий результат показали экзаменуемые при выполнении задания 18 (установление соответствия между неравенствами и решениями). Справились лишь 38 % обучающихся, что ниже результатов прошлых лет (соответственно 71% и 82%). Ошибки связаны с незнанием алгоритма решения дробно-рациональных неравенств, с неверным использованием метода интервалов и записи ответов в приведенную таблицу.

Задание 7 проверяло умение выполнять действия с функциями.

Процент выполнивших задание верно

Задание / Год	2019	2022	2023
Задание 7	88%	97%	97%

Примечание: задание 7 аналогично заданию 14 в КИМ прошлых лет.

Анализ выполнения задания 7 (по рисунку установить соответствие) показывает, что ежегодно экзаменуемые справляются с таким видом заданий, показывая стабильно высокий результат от 88% до 97%. Выпускники верно поставили в соответствие каждому из указанных периодов времени характеристику населения в данный период. Три процента экзаменуемых допустили ошибки в определении соответствия каждого интервала (ошибки в чтении графика) или неверно указали в таблице под каждой буквой соответствующий номер.

Таким образом, результаты экзаменационной работы на базовом уровне выявили проблемы:

- недостаточно сформированы у выпускников вычислительные навыки;
- недостаточная подготовка по геометрии: незнание основных формул, теорем, что не позволяет решать задачи с геометрическим содержанием;
- невнимательное чтение текста задания или непонимание смысла вопроса задачи, в результате чего задача решается формально;
- неумение построения и исследования математической модели по тексту задачи;
 - ошибки в решении текстовых задач – неправильная организация первичного восприятия выпускниками условия задачи и ее анализа, которые проводятся без должной опоры на жизненную ситуацию, отраженную в задаче, без ее предметного или графического моделирования.

Следует отметить, что перечисленные выше проблемы, встречаются довольно часто, поэтому необходимо уделять больше внимания на развитие вычислительных навыков, навыков составления математических моделей по тексту задачи и обратить особое внимание на подготовку по геометрии и теоретическую и практическую. Причем совершенствовать эти навыки постоянно, и при занятиях по предмету, и в период подготовки к ЕГЭ.

Анализируя результаты, полученные выпускниками, следует рекомендовать использовать при итоговом повторении и подготовке к ЕГЭ задачи из открытого банка заданий, внедрять онлайн-тренажеры.

Анализ метапредметных результатов обучения, повлиявших на выполнение заданий КИМ

Согласно ФГОС СОО, должны быть достигнуты не только предметные, но и метапредметные результаты, характеризующиеся овладением познавательных, коммуникативных и регулятивных универсальных учебных действий (УУД). Сформированные УУД позволили экзаменуемым выполнить задания КИМ.

Познавательные универсальные учебные действия (базовые логические, базовые исследовательские и умение работать с информацией):

- базовые логические действия, например, выстраивать аргументацию, обосновывать собственные суждения и выводы при выполнении геометрической задачи 11. Следует отметить, что только у 43% экзаменуемых сформировано данное учебное действие;

- базовые исследовательские умения, например, прогнозировать возможное развитие процесса, а также выдвигать предположения о его развитии в новых условиях продемонстрировали обучающиеся при выполнении задачи 15 (процент выполнения составил 84%) – прикладная задача с экономическим содержанием, при решении которой необходимо построить математическую модель конкретной ситуации и провести ее исследование. В данном задании усилена сюжетная, практико-ориентированная составляющая условия: *Ежемесячная плата за телефон составляет 250 рублей. В следующем году она увеличится на 4%. Сколько рублей будет составлять ежемесячная плата за телефон в следующем году?*

Анализ выполнения практико-ориентированных заданий за три последние года выявил положительную динамику решения такого типа задач: в 2019 г. от 63 до 97%, в 2022 г. от 82 до 98%, а в 2023 году от 84 до 100%. Таким образом, учителями математики ведется работа по формированию метапредметного результата «понимание и применение математических знаний»;

- умения работать с информацией, например, структурировать информацию. Например, задание 6, процент выполнения составил 95%, при решении которой необходимо найти наименьшую стоимость пылесоса в магазинах (из представленных).

Коммуникативные универсальные учебные действия (общение):

- умение общения, например, выражать свою точку зрения в письменных текстах, давать пояснения по ходу решения задачи, комментировать полученный результат. Это умение относится к заданиям 19 и 21. В сравнении с предыдущим 2022 годом, результат выполнения данных заданий оказался чуть выше на 3% (задание 19) и на 4 % (задание 21).

Регулятивные универсальные учебные действия (саморганизации и самоконтроля):

- умение самоорганизации, например, выбирать способ решения задачи с учетом собственных возможностей. Задание 20 продемонстрировало сформированные умения выбора способа решения задачи на «смеси и сплавы». Анализируя работы, следует отметить, что процент выполнения такого рода задач находится на невысоком уровне и в этом году составил всего 11%;

- умение самоконтроля, например, оценивать соответствие результата условиям задачи, находить ошибку. Данное умение должно быть сформировано у обучающихся при выполнении всех заданий КИМ 1-21. Анализируя средний процент выполнения заданий, отмечаем, что данное регулятивное УУД сформировано у высокого процента обучающихся, верно выполнивших задания с кратким ответом, это задания 2 (91%), 3 (97%), 6 (95%), 7 (93%).

Достижения метапредметных результатов влияет на успешность выполнения заданий КИМ по математике на профильном уровне. Следовательно, учителю необходимо формировать у обучающихся опыт поиска путей решения математических задач, учить математическому моделированию реальных ситуаций и переносить способы решения учебных задач на реальные объекты.

ВЫВОДЫ об итогах анализа выполнения заданий, групп заданий:

Перечень элементов умений, усвоенных в процессе обучения, выпускниками региона в целом можно считать достаточным на базовом уровне:

- уметь использовать приобретенные знания и умения в практической деятельности и повседневной жизни;
- умения выполнять вычисления и преобразования;
- уметь выполнять действия с функциями.

Анализ выполнения заданий показывает, что прослеживается положительная динамика при выполнении задания 4 (работа с формулой) от 63% до 94%. Стабильный результат выполнения задания 2 (установление соответствия между величинами и их возможными значениями) и задания 3 (работа с рисунком). Результат выполнения данного рода заданий демонстрируют положительную динамику овладения базовыми умениями необходимыми при решении практико-ориентированных заданий.

Перечень элементов умений, усвоение которых школьниками региона в целом **нельзя считать достаточным на базовом уровне:**

- уметь выполнять действия с геометрическими фигурами;
- уметь строить и исследовать простейшие математические модели;
- уметь решать уравнения и неравенства.

Следует отметить невысокий процент выполнения геометрических заданий (например, задание 11), что свидетельствует о сохраняющихся системных недостатках в преподавании геометрии и недостаточном уровне формирования умения выполнять действия с геометрическими фигурами. Также причиной является рассмотрение лишь тех типов задач, которые встречались на экзамене в предыдущие годы, вместо полноценного изучения геометрии.

Как показывает анализ работ и допущенных ошибок, для успешного решения геометрических задач необходима не только хорошая математическая подготовка, но и умение логически рассуждать и четко излагать свои мысли. Следует рекомендовать, помимо решения задач из открытого банка ЕГЭ, включать в процесс обучения: задачи,

требующие видения геометрических фигур; задачи, развивающие геометрическую интуицию; больше уделять внимания содержательным геометрическим задачам, развивающим видение геометрических конструкций, требующим четкого изложения доказательства и применения вычислительных навыков.

Анализ результатов выполнения заданий ЕГЭ 2023 г. по математике (базовый уровень) обучающимися Владимирского региона показывает, что использованные КИМы в целом соответствуют целям проведения экзамена, позволяют дифференцировать выпускников с различной мотивацией и уровнем подготовки по ключевым разделам курса математики.

При выполнении практико-ориентированных задач (задания 2, 3, 4, 15) затруднения у обучающихся вызывают: способность моделировать, анализировать и преобразовывать информацию, работать с рисунком, таблицей, а также интерпретировать полученные результаты, что говорит о недостаточном уровне сформированности функциональной математической грамотности у той части обучающихся, которые не приступили или не выполнили верно задания данного типа.

1.4. Рекомендации по совершенствованию организации и методики преподавания математики на основе выявленных типичных затруднений и ошибок ЕГЭ (базовый уровень)

Результаты экзамена по математике на базовом уровне позволили выявить ряд проблем, которые необходимо учитывать при обучении математике и подготовке обучающихся к государственной итоговой аттестации в формате ЕГЭ.

Важным условием успешной подготовки к экзамену является тщательность в отслеживании результатов учеников по всем темам и в своевременной коррекции уровня усвоения учебного материала.

Низкий процент выполнения геометрических заданий по планиметрии и стереометрии свидетельствует о сохраняющихся системных недостатках в преподавании геометрии в основной школе.

Недостаточное формирование вычислительных навыков учащихся при выполнении заданий 2, 3, 4 и 15 (практико-ориентированные задачи), а также некорректное использование данных задачи при составлении математической модели в задании 20.

На основании вышесказанного, **рекомендуем** педагогам проанализировать результаты государственной итоговой аттестации по математике на заседаниях городских (районных) методических объединений учителей математики; планировать работу на 2023-2024 учебный год с учетом:

- изучения нормативных документов Министерства Просвещения РФ, методических писем и методических рекомендаций ФИПИ <http://www.fipi.ru/>, где содержатся нормативные требования к проведению ЕГЭ, характеристика контрольных измерительных материалов по математике, рекомендации по использованию и интерпретации результатов выполнения экзаменационных работ и т. п. Ознакомление обучающихся с демоверсиями ЕГЭ 2024 г. (акцент на повторение /изучение материала, освоение навыков;

- использования «Открытый банк заданий ЕГЭ. Математика», созданного авторским коллективом ФИПИ с целью подготовки учащихся к итоговой аттестации <http://www.fipi.ru/>;

- ознакомление с видеоконсультациями Рособрнадзора и с ресурсом «Навигатор подготовки к ОГЭ, ЕГЭ» (fipi.ru/navigator-podgotovki);

- использование банка заданий по формированию математической грамотности ИСРО РАО <http://skiv.instrao.ru/bank-zadaniy/matematiceskaya-gramotnost/>;

- выявления проблемных тем теоретического материала по математике за курс основной и старшей школы; организация индивидуальных и групповых занятий по восполнению пробелов в знаниях отдельных теоретических вопросов курса математики;

на занятиях спецкурсов, консультациях продолжить отработку навыков практического применения теории; на уроках повторения пройденного материала уделить особое внимание вопросам и заданиям, вызвавшим затруднения у школьников;

- закрепления навыков смыслового чтения и анализа текста заданий (задания типа 1, 2, 6, 7, 8, 19, 21), т.к. у обучающихся недостаточно сформированы как читательская грамотность, так и умения использовать приобретённые знания в практической деятельности и повседневной жизни. В каждой теме при изучении математики в старшей школе в соответствии с кодификатором содержания выполнять задания, построенные на реальных жизненных сюжетах. Акцент – на обсуждение: обсуждение ситуации, выявление математических аспектов, всех данных, переформулирование и моделирование объектов, перевод на язык математики, обсуждение ограничений, допущений, различные способы решения, обсуждение их рациональности; обсуждение результатов: оценка и интерпретация, соотнесение с ситуацией;

- регулярное включение в ход урока заданий на *«изменение и зависимости», «пространство и форма», «неопределенность», «количественные рассуждения»*. Предъявление обучающимся и выполнение ими контекстных заданий, разработанных на основе проблемных ситуаций, является, важным видом познавательной и практической деятельности, в ходе которой развивается функциональная грамотность, в том числе и математическая. Эта деятельность требует, во-первых, применения осваиваемых школьниками знаний, умений и опыта, а во-вторых, переноса осваиваемых в рамках учебного предмета «Математика» знаний и умений на более широкую познавательную и практическую область, расширяющуюся по мере обучения школьников;

- усиления внимания к геометрическим задачам на решение и доказательство; необходимо обратить самое внимание на изучение геометрии – непосредственно с 7 класса, когда начинается систематическое изучение этого предмета. Подготовку выпускников следует начинать не с рассмотрения примеров решения геометрических задач вариантов ЕГЭ, а с изучения свойств геометрических фигур и их элементов. Задачи необходимо решать по темам, например, «Окружность и круг» и т.д. Таким образом, следует рекомендовать при подготовке к экзамену особое внимание уделить формированию и развитию умений выполнять действия с геометрическими фигурами, предлагать задания с разными числовыми данными по одному рисунку, предлагать задания где необходимо определять различные элементы фигуры и/или вычислить их числовые характеристики, уделять больше внимания развитию умения верно пользоваться геометрическим чертежом, добиваться достаточного уровня владением теоретическим материалом;

- проведения анализа условия задачи, искать пути решения, применять известные алгоритмы в измененной ситуации (стандартные методы решения простейших уравнений и неравенств, преобразование алгебраических выражений, свойства геометрических фигур при решении планиметрических и стереометрических задач);

- рассмотрения разобранных методов решения задач с параметрами и задач экономического содержания;

- усиления работы по повышению уровня вычислительных навыков учащихся (например, с помощью устной работы на уроках: применение арифметических законов действий при работе с рациональными числами, свойства степеней, корней и др.), что позволит им успешно выполнить задания, избежав ошибок, применяя рациональные методы вычислений;

- отработки у обучающихся быстрого и правильного выполнения заданий с кратким ответом; постоянно контролировать умения, необходимые для выполнения заданий базового уровня. В целях эффективного использования времени на экзамене, нужно учить школьников приемам быстрого и рационального счета. А также формирование не только

функциональной математической грамотности, но и читательской грамотности при работе с текстом как основной составляющей функциональной грамотности обучающихся: работа с рисунками, схемами, графиками, текстом, применении знаний на практике. Уделять внимание обучению работы с вопросами, вычленению ключевых теорий, на базе которых строятся ответы;

- использование возможности сетевого взаимодействия с обучающимися, организация изучения тем и итоговое повторение на основе интерактивных уроков, применяя образовательные платформы (например, <https://эдо.образование33.рф> и др.).

На все это нужно обращать особое внимание, выявляя «группы риска» обучающихся, с целью организации эффективной подготовки таких учащихся к государственной итоговой аттестации.

- Муниципальным органам управления образованием.

- провести диагностику факторов, влияющих на качество образования в общеобразовательных организациях;

- продолжить работу муниципальных ресурсных центров по подготовке к государственной итоговой аттестации по математике и другим предметам;

- провести работу со школами «зона риска» по недопущению попадания данных школ с низкими образовательными организациями;

- усиление контроля за осуществлением подготовки учащихся к государственной итоговой аттестации в форме ЕГЭ.

- Прочие рекомендации.

- проведение учителями диагностических работ в формате ЕГЭ и учет их результатов по ликвидации пробелов в знаниях обучающихся, размещенных на сайте СтатГрад <https://statgrad.org/>;

- посещение учениками занятий факультативных, элективных курсов, курсов по выбору;

- обеспечение формирования функциональной математической грамотности школьников, как необходимого условия для выполнения заданий ЕГЭ по математике на базовом уровне.

Рекомендации по темам для обсуждения / обмена опытом на методических объединениях учителей-предметников:

- Результаты ЕГЭ по математике на базовом уровне в 2023 году.

- Анализ типичных ошибок заданий с кратким ответом базового уровня сложности.

- КИМЫ по математике на базовом уровне в 2024 г. и критерии оценивания заданий с кратким ответом.

- Методы и приемы решения математических задач по содержательным линиям курса математики: числа и выражения, уравнения и неравенства, функция и графики, вероятность и статистика.

- Методы и приемы геометрических задач: планиметрических и стереометрических.

- Использование ЦОС в образовательной практике учителей математики.

- Формирование функциональной грамотности школьников, в том числе читательской и математической.

**ЧАСТЬ II. ИТОГИ ЕГЭ ПО МАТЕМАТИКЕ (ПРОФИЛЬНЫЙ УРОВЕНЬ) ВО
ВЛАДИМИРСКОЙ ОБЛАСТИ В 2023 ГОДУ**

2.1. Характеристика участников ЕГЭ по математике

1. Количество участников ЕГЭ по учебному предмету (за три года)

Таблица 2-6

2021 г.		2022 г.		2023 г.	
чел.	% от общего числа участников	чел.	% от общего числа участников	чел.	% от общего числа участников
3020	53,20	2427	44,62	2166	41,30

2. Процентное соотношение юношей и девушек, участвующих в ЕГЭ

Таблица 2-7

Пол	2021 г.		2022 г.		2023 г.	
	чел.	% от общего числа участников	чел.	% от общего числа участников	чел.	% от общего числа участников
Женский	1378	45,63	1059	43,30	867	39,64
Мужской	1642	54,37	1368	55,93	1299	59,40

3. Количество участников ЕГЭ в регионе по категориям

Таблица 2-8

Всего участников ЕГЭ по предмету	2166
Из них:	2030
– ВТГ, обучающихся по программам СОО	
– ВТГ, обучающихся по программам СПО	70
– Выпускников общеобразовательной организации, не завершивший среднее общее образование (не прошедший ГИА)	1
– ВПЛ	65
– Участников с ограниченными возможностями здоровья	20

4. Количество участников ЕГЭ по типам⁵ ОО

Таблица 2-9

Всего ВТГ	2030
Из них:	193
– выпускники гимназий	
– выпускники кадетской школы-интерната	23
– выпускники лицеев	163
– выпускники открытой (сменной) общеобразовательной школы	7
– выпускники СОШ	1550
– выпускники СОШ с углублённым изучением отдельных предметов	94

⁵ Перечень категорий ОО может быть уточнен / дополнен с учетом специфики региональной системы образования

5. Количество участников ЕГЭ по предмету по АТЕ региона

Таблица 2-10

№ п/п	АТЕ	Количество участников ЕГЭ по учебному предмету	% от общего числа участников в регионе
1.	Александровский район	139	6,42
2.	Вязниковский район	63	2,91
3.	г.Владимир	731	33,75
4.	г.Гусь-Хрустальный	90	4,16
5.	г.Ковров	357	16,48
6.	г.Радужный	44	2,03
7.	Гороховецкий район	26	1,20
8.	Гусь-Хрустальный район	23	1,06
9.	Камешковский район	22	1,02
10.	Киржачский район	57	2,63
11.	Ковровский район	18	0,83
12.	Кольчугинский район	62	2,86
13.	Меленковский район	42	1,94
14.	Муромский район	7	0,32
15.	о.Муром	248	11,45
16.	Петушинский район	77	3,55
17.	Селивановский район	15	0,69
18.	Собинский район	57	2,63
19.	Судогодский район	36	1,66
20.	Суздальский район	35	1,62
21.	Юрьев-польский район	17	0,78

6. Основные учебники по предмету из федерального перечня Минпросвещения России (ФПУ)⁶, которые использовались в ОО субъекта Российской Федерации в 2022-2023 учебном году.

Таблица 2-11

№ п/п	Название учебников ФПУ	Примерный процент ОО, в которых использовался учебник
-------	------------------------	---

⁶ Федеральный перечень учебников, допущенных к использованию при реализации имеющих государственную аккредитацию образовательных программ основного общего и среднего общего образования

№ п/п	Название учебников ФПУ	Примерный процент ОО, в которых использовался учебник
1.	Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа. 10-11 кл. Базовое и углубленное обучение. /Алимов Ш.А., Колягин Ю.М., Ткачева М.В. и другие. – М.: АО «Издательство «Просвещение», 2019.	15
2.	Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа. 10 кл. Базовое и углубленное обучение. /Колягин Ю.М., Ткачева М.В. и другие. – М.: АО «Издательство «Просвещение», 2019	23
3.	Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа. 11 кл. Базовое и углубленное обучение. /Колягин Ю.М., Ткачева М.В. и другие. – М.: АО «Издательство «Просвещение», 2019.	23
4.	Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа. 10-11 кл. Базовое обучение. /Мордкович А.Г., Семенов П.В. – М.: ООО «ИОЦ МНМОЗИНА». 2020.	10
5.	Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа. 10 кл. Углубленное обучение. /Мордкович А.Г., Семенов П.В. – М.: ООО «ИОЦ МНМОЗИНА». 2020.	32
6.	Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа. 11 кл. Углубленное обучение. /Мордкович А.Г., Семенов П.В. – М.: ООО «ИОЦ МНМОЗИНА». 2020.	32
7.	Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа. 10 кл. Базовое и углубленное обучение. /Мерзляк А.Г., Номировский Д.А., Полонский В.Б., Якир М.С. - М.: ООО ИЦ «ВЕНТАНА-ГРАФ», 2019.	15
8.	Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа. 11 кл. Базовое и углубленное обучение. /Мерзляк А.Г., Номировский Д.А., Полонский В.Б., Якир М.С. - М.: ООО ИЦ «ВЕНТАНА-ГРАФ», 2020.	15
9.	Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа. 10 кл. /Никольский С.М., Потапов М.К., Решетников Н.Н. и др.- М.: АО «Изд. «Просвещение», 2019.	5
10.	Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа. 11 кл. /Никольский С.М., Потапов М.К., Решетников Н.Н. и др.- М.: АО «Изд. «Просвещение», 2019.	5

№ п/п	Название учебников ФПУ	Примерный процент ОО, в которых использовался учебник
11.	Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Геометрия. 10-11 кл. /Атанасян Л.С., Бутузов В.Ф., Кадомцев С.Б. и др. – М.: АО «Издательство «Просвещение», 2019.	68
12.	Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Геометрия. 10 кл. /Мерзляк А.Г., Номировский Д.А., Полонский В.Б., Якир М.С. - ООО Издательский центр «ВЕНТАНА-ГРАФ», 2020.	15
13.	Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Геометрия. 11 кл. /Мерзляк А.Г., Номировский Д.А., Полонский В.Б., Якир М.С. - ООО Издательский центр «ВЕНТАНА-ГРАФ», 2021.	15
14.	Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Геометрия. 10 кл. Базовое и углубленное обучение. - /Смирнов А.В., Смирнова И.М. - «ИОЦ МНМОЗИНА», 2020.	7
14.	Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Геометрия. 11 кл. Базовое и углубленное обучение. - /Смирнов А.В., Смирнова И.М. - «ИОЦ МНМОЗИНА», 2020.	7
15.	Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Геометрия. 10-11 кл. /Погорелов А.В. и др. – М.: АО «Издательство «Просвещение», 2019.	10

ВЫВОДЫ о характере изменения количества участников ЕГЭ по математике (профильный уровень)

В ЕГЭ по математике профильного уровня в 2023 году приняли участие 2166 чел., что составляет 41,3% от общего количества участников. Доля участников экзамена на протяжении трех лет значительно (на 11,9%) снизилась (2021 год – 53,1%, 2022 год – 44,6%). Лидируют в количественном рейтинге участников, сдававших профильную математику, участники из крупных городов области – г. Владимир (731 чел. - 33,8%), г. Ковров (357 чел. - 16,5%).

К числу муниципальных образований региона, в которых отмечается наименьшее количество участников ЕГЭ по математике на протяжении нескольких лет, относятся Муромский район (2021 – 10 чел. (0,33%), 2022 – 8 (0,3%), 2023 – 7 (0,3%)); Селивановский район (2021 – 18 чел. (0,6%), 2022 – 11 (0,5%), 2023 – 15 (0,7%)).

По гендерному признаку по данным направлениям подготовки имеется незначительное превышение количества юношей над девушками. Количество юношей, выбравших экзамен, в 1,5 раза превышает количество девушек и в % отношении незначительно увеличилось по отношению к двум предыдущим годам.

В 2023 году, как и в предыдущие годы, большую часть из участников экзамена составляют выпускники текущего года. Выпускников текущего года суммарно 2100 чел. (97,0%) (2022 – 2353 (97,0%)). В 2023 году произошло незначительное увеличение количества ВТГ, обучающихся по программам СПО: в 2022 году – 53 чел. (2,2%), в 2023 году – 70 (3,2 %). В 2023 году наблюдается незначительное (на 0,1%) снижение доли обучающихся с ограниченными возможностями здоровья: 2022 год – 1,0%, 2023 год – 0,9%.

Среди участников экзамена (ВТГ) преобладают выпускники средних общеобразовательных школ: в 2023 году количество таких участников составило 1550 чел. (76,4%) (2022 год – 1734 (75,4%)).

Таким образом, на основании количественной характеристики состава участников ЕГЭ по математике профильного уровня можно сделать вывод о том, что общая отрицательная динамика количественных показателей в 2023 году существенно не отличается от предыдущих лет. Изменение числа участников ЕГЭ по АТЕ происходит, в основном, под влиянием демографической ситуации.

2.2. Основные результаты ЕГЭ по математике (профильный уровень)

1. Диаграмма распределения тестовых баллов участников ЕГЭ по предмету в 2023 г. (количество участников, получивших тот или иной тестовый балл)



2. Динамика результатов ЕГЭ по предмету за последние 3 года

Таблица 2-12

№ п/п	Участников, набравших балл	Субъект Российской Федерации		
		2021 г.	2022 г.	2023 г.
1.	ниже минимального балла ⁷ , %	6,23	2,97	3,74
2.	от минимального балла до 60 баллов, %	46,46	42,81	46,81
3.	от 61 до 80 баллов, %	39,21	50,56	45,24
4.	от 81 до 99 баллов, %	8,05	3,67	4,11
5.	100 баллов, чел.	2	0	2
6.	Средний тестовый балл	55,99	58,49	56,35

3. Результаты ЕГЭ по предмету по группам участников экзамена с различным уровнем подготовки:

А) в разрезе категорий⁸ участников ЕГЭ

⁷ Здесь и далее: минимальный балл – установленное Рособранзором минимальное количество баллов ЕГЭ, подтверждающее освоение образовательной программы среднего общего образования (по учебному предмету «русский язык» для анализа берется минимальный балл 24).

⁸ Перечень категорий ОО может быть дополнен с учетом специфики региональной системы образования

Таблица 2-13

№ п/п	Участников, набравших балл	ВГГ, обучающиеся по программам СОО		ВГГ, обучающиеся по программам СПО		Выпускник общеобразовательной организации, не завершивший среднее общее образование (не прошедший ГИА)	ВЛЛ	Участники экзамена с ОБЗ
1.	Доля участников, набравших балл ниже минимального	0,89	60,00	100,00			30,77	0,00
2.	Доля участников, получивших тестовый балл от минимального балла до 60 баллов	47,14	37,14	0,00			47,69	45,00
3.	Доля участников, получивших от 61 до 80 баллов	47,54	2,86	0,00			20,00	50,00
4.	Доля участников, получивших от 81 до 99 баллов	4,33	0,00	0,00			1,54	5,00
5.	Количество участников, получивших 100 баллов	2	0	0			0	0

Б) в разрезе типа⁹ ОО

Таблица 2-14

	Доля участников, получивших тестовый балл				Количество участников, получивших 100 баллов
	ниже минимального	от минимального до 60 баллов	от 61 до 80 баллов	от 81 до 99 баллов	
Гимназия	1,02	28,06	66,84	4,08	0
Кадетская школа-интернат	4,35	69,57	21,74	4,35	0
Лицей	1,78	36,69	53,25	8,28	0
Открытая (сменная) общеобразовательная школа	44,44	44,44	11,11	0,00	0
Средняя общеобразовательная школа	1,76	50,19	44,28	3,65	2
Средняя общеобразовательная школа с углубленным изучением отдельных предметов	0,99	46,53	44,55	7,92	0

В) Основные результаты ЕГЭ по предмету в сравнении по АТЕ

Таблица 2-15

№ п/п	Наименование АТЕ	К о л и	Доля участников, получивших тестовый балл		Количество участников,

⁹ Перечень категорий ОО дополняется / уточняется в соответствии со спецификой региональной системы образования

			ниже минимал ного	от минимал ного до 60 баллов	от 61 до 80 баллов	от 81 до 100 баллов	получивших 100 баллов
1.	Александровский район	139	5,76	46,76	42,45	5,04	0
2.	Вязниковский район	63	3,17	41,27	52,38	3,17	0
3.	г.Владимир	731	5,61	41,86	46,79	5,75	1
4.	г.Гусь-Хрустальный	90	1,11	46,67	47,78	4,44	0
5.	г.Ковров	357	3,92	44,82	46,22	5,04	0
6.	г.Радужный	44	2,27	59,09	34,09	4,55	0
7.	Гороховецкий район	26	0,00	57,69	42,31	0,00	0
8.	Гусь-Хрустальный район	23	4,35	52,17	43,48	0,00	0
9.	Камешковский район	22	0,00	40,91	59,09	0,00	0
10.	Киржачский район	57	3,51	52,63	42,11	1,75	0
11.	Ковровский район	18	0,00	50,00	50,00	0,00	0
12.	Кольчугинский район	62	0,00	38,71	59,68	1,61	1
13.	Меленковский район	42	0,00	61,90	38,10	0,00	0
14.	Муромский район	7	0,00	42,86	42,86	14,29	0
15.	о.Муром	248	2,82	50,81	42,74	3,63	0
16.	Петушинский район	77	1,30	61,04	35,06	2,60	0
17.	Селивановский район	15	6,67	80,00	13,33	0,00	0
18.	Собинский район	57	3,51	45,61	47,37	3,51	0
19.	Судогодский район	36	0,00	55,56	44,44	0,00	0
20.	Суздальский район	35	0,00	65,71	34,29	0,00	0
21.	Юрьев-польский район	17	0,00	41,18	58,82	0,00	0

4. Перечень ОО, продемонстрировавших наиболее высокие результаты ЕГЭ по предмету

Выбирается¹⁰ от 5 до 15% от общего числа ОО в субъекте Российской Федерации, в которых:

- о доля участников ЕГЭ, получивших балл «5», имеет максимальные значения (по сравнению с другими ОО субъекта Российской Федерации);

Примечание: при необходимости по отдельным предметам можно сравнивать и доли участников ЕГЭ, получивших балл «4».

- о доля участников ЕГЭ, не достигших минимального балла (получивших балл «2»), имеет минимальные значения (по сравнению с другими ОО субъекта Российской Федерации)

Таблица 2-16

№ п/п	Наименование ОО	Количество участников, чел.	«2»	«3»	«4»	«5»
1.	МБОУ г. Владимира "СОШ 40"	23	0,00	0,00	21,74	78,26
2.	МБОУ "СОШ №6" Вязниковский район	13	0,00	0,00	23,08	76,92

¹⁰ Сравнение результатов по ОО проводится при условии количества участников экзамена от ОО не менее 10 человек.

№ п/п	Наименование ОО	Количество участников, чел.	«2»	«3»	«4»	«5»
3.	МАОУ г. Владимира "Гимназия №35"	26	0,00	7,69	15,38	76,92
4.	МБОУ "СОШ №2 " Вязниковский район	17	0,00	11,76	11,76	76,47
5.	МБОУ г. Владимира "Лицей-интернат №1"	43	0,00	2,33	34,88	62,79
6.	МБОУ г. Владимир "СОШ №31"	30	0,00	0,00	40,00	60,00
7.	МБОУ г. Владимира "СОШ №46"	12	0,00	8,33	33,33	58,33
8.	МБОУ "СОШ № 1" г. Гусь-Хрустальный	13	0,00	7,69	38,46	53,85
9.	МАОУ г. Владимира "Лингвистическая гимназия №23 им. А.Г. Столетова"	43	0,00	6,98	39,53	53,49
10.	МЮОУ "СОШ №3" Гороховецкого района	15	0,00	6,67	40,00	53,33
11.	МБОУ города Коврова "СОШ №17"	15	0,00	13,33	33,33	53,33
12.	МБОУ города Коврова "СОШ №22"	23	0,00	13,04	34,78	52,17
13.	МБОУ г. Владимира" СОШ №8"	23	0,00	13,04	34,78	52,17
14.	МАОУ г. Владимира "Промышленно-коммерческий лицей"	32	0,00	3,13	46,88	50,00
15.	МБОУ «СОШ № 1" г. Покров	20	0,00	5,00	45,00	50,00
16.	МБОУ города Юрьев-Польского "Школа №3"	16	0,00	6,25	43,75	50,00
17.	МБОУ "СОШ №10 с углубленным изучением иностранных языков г. Владимира"	20	0,00	10,00	40,00	50,00
18.	МБОУ г. Владимира "СОШ №15"	30	0,00	13,33	36,67	50,00
19.	МБОУ СОШ № 1 ЗАТО города Радужный	12	0,00	16,67	33,33	50,00
20.	МБОУ "СОШ №42" г. Владимира	12	0,00	25,00	25,00	50,00
21.	МБОУ города Коврова "СОШ №23"	15	0,00	13,33	40,00	46,67
22.	МБОУ города Коврова «СОШ № 21»	37	0,00	8,11	45,95	45,95
23.	МАОУ г. Владимира "СОШ №25"	35	0,00	5,71	48,57	45,71
24.	МБОУ "СОШ № 7" города Киржача	11	0,00	0,00	54,55	45,45
25.	МБОУ "Гимназия № 6" о. Муром	40	0,00	5,00	50,00	45,00
26.	МБОУ «СОШ № 15 с углубленным изучением отдельных предметов» г. Гусь-Хрустальный	29	0,00	20,69	34,48	44,83
27.	МБОУ "СОШ №9" Вязниковский район	18	0,00	0,00	55,56	44,44
28.	МБОУ "СОШ № 3"г. Гусь-Хрустальный	27	3,70	3,70	48,15	44,44
29.	МБОУ "СОШ №44" г. Владимира	14	7,14	7,14	42,86	42,86
30.	МБОУ "СОШ №19"	17	0,00	0,00	58,82	41,18
31.	МАОУ г. Владимира "Гимназия №39"	27	3,70	14,81	40,74	40,74
32.	МБОУ города Коврова «СОШ №11»	10	0,00	0,00	60,00	40,00
33.	МБОУ города Коврова "СОШ №14"	15	0,00	6,67	53,33	40,00
34.	МБОУ "СОШ №1 города Суздаля"	10	0,00	10,00	50,00	40,00
35.	МБОУ г. Владимира "СОШ №41"	10	0,00	10,00	50,00	40,00
36.	МБОУ «СОШ №19» о. Муром	15	0,00	20,00	40,00	40,00
37.	МБОУ СОШ №8 Александровский район	20	5,00	25,00	30,00	40,00
38.	МАОУ г. Владимира "СОШ № 36"	53	1,89	9,43	49,06	39,62
39.	МБОУ города Коврова "Гимназия №1 имени А.Н. Барсукова"	23	0,00	8,70	52,17	39,13

№ п/п	Наименование ОО	Количество участников, чел.	«2»	«3»	«4»	«5»
40.	МБОУ "СШ школа № 7 им. Н.К. Крупской" Кольчугинский район	23	4,35	21,74	34,78	39,13
41.	МБОУ "СОШ №2" города Киржача	16	0,00	0,00	62,50	37,50
42.	МБОУ "СОШ № 4" о. Муром	24	0,00	8,33	54,17	37,50
43.	МБОУ г.Владимира "СОШ №1"	11	0,00	9,09	54,55	36,36

ВЫВОДЫ о характере изменения результатов ЕГЭ по математике (профильный уровень)

Результаты ЕГЭ 2023 года относительно результатов ЕГЭ 2022 года по математике профильного уровня показывают положительную динамику:

- количество участников, набравших балл от 81 до 99% баллов увеличилось от 3,67% (2022 г.) до 4,11% (2023 г.);

- количество участников, набравших 100 баллов в 2023 году – 2 человека, в 2022 году такие учащиеся отсутствовали.

Наиболее значимые изменения в повышении показателей произошли в Александровском, Вязниковском, Киржачском, Ковровском, Кольчугинском, Меленковском, Муромском районах, а также в городах Владимир, Ковров.

Можно сделать вывод, что учителя математики стали больше уделять внимания работе с высокомотивированными обучающимися, используя при этом учебно-методические комплекты для углубленного обучения.

Сравнительный анализ количества участников, получивших тестовый балл от 61 до 80, показывает, что практически во всех территориях данный показатель увеличился или сохранился на прежнем уровне. Эти результаты можно аргументировать постоянной работой педагогов по совершенствованию методики подготовки учащихся к ГИА, посещением курсов повышения квалификации по проблемам подготовки учащихся к итоговой аттестации, участием в вебинарах, круглых столах, качественной работой методических объединений.

Отметим, что в 42 образовательных организациях региона обучающиеся продемонстрировали наиболее высокие результаты ЕГЭ по профильной математике. Наиболее высокий уровень по предмету показывают:

1. МАОУ СОШ №36 г. Владимира;
2. МБОУ СОШ №10 г. Владимира;
3. МАОУ СОШ № 25 г. Владимира;
4. МБОУ Якимано-Слободская СОШ о Муром;
5. МБОУ СОШ № 14 г. Коврова;
6. МБОУ "СОШ № 15" г. Гусь-Хрустального,
7. МБОУ СОШ № 9 г. Коврова;
8. МАОУ ПКЛ г. Владимира;
9. МБОУ Лицей № 1 о. Муром;
10. МАОУ СОШ №13 Александровского района;
11. МБОУ СОШ №8 г. Владимира;
12. МАОУ Гимназия №35 г. Владимира;
13. МБОУ СОШ №7 Кольчугинского района;
14. МБОУ СОШ № 17 г. Коврова;
15. МБОУ СОШ №15 г. Гусь-Хрустального.

Сравнительный анализ количества участников, получивших балл ниже минимального, незначительно увеличился (менее 1%) от 2,97% (2022 г.) до 3,74 (2023 г.). Большой

процент — это обучающиеся по программам СПО (60%) и выпускники общеобразовательной организации, не завершивший среднее общее образование (не прошедший ГИА, 100%). Малый процент (0,89%) относится и к выпускникам текущего год. Этот результат можно аргументировать тем, что данный процент учащихся не определился с выбором экзамена (базовый или профильный уровни).

Отметим, что в 43 образовательных организациях региона обучающиеся продемонстрировали низкие результаты ЕГЭ по профильной математике. Наиболее низкий уровень по предмету показывают:

Владимирский строительный колледж;

1. МБОУ СОШ 5, №23 г. Коврова;
2. МБОУ СОШ №2, №6, №21, №48 г. Владимира;
3. МБОУ СОШ № 6 г. Владимира;
4. МБОУ СОШ №4 г. Собинка;
5. МБОУ Курловская СОШ Гусь-Хрустального района.

Это говорит о том, что в данных организациях не в полной мере была организована предметная подготовка учащихся к ГИА или не в должной мере оказана психологическая поддержка мотивированным обучающимся с низкой мотивацией обучения или данный процент учащихся неправильно определился с выбором экзамена (данным ученикам необходимо было рекомендовать сдавать экзамен по математике на базовом уровне).

2.3. Анализ типичных ошибок участников ЕГЭ по математике (профильный уровень)

Контрольно-измерительные материалы (КИМ) единого государственного экзамена по математике (профильный уровень) представляют собой набор заданий стандартизированной формы, которые соответствуют спецификации к демонстрационному варианту. Содержание КИМ ЕГЭ определяется на основе федерального государственного образовательного стандарта среднего общего образования (ФГОС) (приказ Министерства образования и науки Российской Федерации от 17.05.2012 № 413 с изменениями, внесёнными приказами Министерства образования и науки Российской Федерации от 29.12.2014 №1645, от 31.12.2015 № 1578, от 29.06.2017 № 613, приказами Министерства просвещения Российской Федерации от 24.09.2020 № 519, от 11.12.2020 № 712) с учётом примерной основной образовательной программы среднего общего образования (одобрена решением федерального учебно-методического объединения по общему образованию (протокол от 28.06.2016 № 2/16з)).

Варианты КИМ составлены на основе спецификации и кодификаторов проверяемых элементов содержания и требований к уровню подготовки выпускников общеобразовательных организаций.

Изменения в содержании КИМ ЕГЭ по математике профильного уровня 2023 года в сравнении с КИМ 2022 года отсутствуют.

Однако в структуру части 1 КИМ внесены изменения, позволяющие участнику экзамена более эффективно организовать работу над заданиями за счёт перегруппировки заданий по тематическим блокам. Работа начинается с заданий по геометрии, затем следует блок заданий по элементам комбинаторики, статистике и теории вероятностей, а затем идут задания по алгебре и началам математического анализа, которые представлены в спецификации КИМ на сайте ФИПИ <http://www.fipi.ru/>.

Распределение заданий КИМ (профильный уровень) по содержанию, видам умений, уровню сложности и среднему проценту выполнения по региону, представлены в таблице 2-11:

Таблица 2-11

№	Проверяемые элементы содержания / умения	Уровень сложности задания	Процент выполнения задания					Средний % выполнения открытого варианта №310
			Средний % выполнения по всем группам	Группа не преодолевших минимальный балл	Группа от минимального до 60 т.б. (%)	Группа от 61 до 80 т.б.	Группа от 81 до 100 т.б. (%)	
1	2.1 Уметь выполнять действия с геометрическими фигурами, координатами и векторами	Б	73	24	67	89	98	69
2	6.3 Уметь выполнять действия с геометрическими фигурами, координатами и векторами	Б	61	10	45	86	94	61
3	5.1, 5.5 Уметь строить и исследовать простейшие математические модели	Б	95	76	97	98	98	94
4	1.1 – 1.4 Уметь использовать приобретённые знания и умения в практической деятельности и повседневной жизни	Б	77	20	73	93	99	74
5	5.2 – 5.5 Уметь решать уравнения и неравенства	Б	97	81	99	100	99	96
6	4.1 – 4.3 Уметь выполнять вычисления и преобразования	Б	85	28	84	98	100	82
7	2.1, 2.2 Уметь выполнять действия с функциями	П	75	26	65	95	100	77
8	2.1, 2.2 Уметь использовать приобретённые знания и умения в практической деятельности и повседневной жизни	П	71	8	63	93	98	71
9	2.1, 2.2, 3.1 – 3.3 Уметь строить и исследовать простейшие математические модели	П	68	13	56	90	99	62

10	6.3 Уметь выполнять действия с функциями	П	65	6	48	93	99	62
11	4.1, 4.2 Уметь выполнять действия с функциями	П	60	1	43	89	98	53
12	2.1, 2.2 Уметь решать уравнения и неравенства	П	37	0	6	70	98	35
13	5.2 – 5.6 Уметь выполнять действия с геометрическими фигурами, координатами и векторами	П	1	0	0	1	13	1
14	2.1, 2.2 Уметь решать уравнения и неравенства	П	18	0	1	32	88	15
15	1.1, 2.1.12 Уметь использовать приобретённые знания и умения в практической деятельности и повседневной жизни	П	7	0	0	11	62	5
16	5.1, 5.5 Уметь выполнять действия с геометрическими фигурами, координатами и векторами	П	2	0	0	2	31	2
17	2.1, 2.2, 3.1 – 3.3 Уметь решать уравнения и неравенства	В	5	0	0	5	65	4
18	1.1 – 1.4, 2.1 – 2.2, 3.1 – 3.3 Уметь строить и исследовать простейшие математические модели	В	17	2	7	27	63	16

Анализ выполнения заданий с кратким ответом Части 1 показывает, что учащиеся достаточно успешно справились с заданиями базового уровня 1-3 и 4-6 (процент выполнения по всем вариантам, использованным в регионе от 61% до 97%, процент выполнения открытого варианта от 61% до 96%), этот результат сопоставим с результатами 2021 года (по всем вариантам, использованным в регионе от 62% до 96%, процент выполнения открытого варианта процент выполнения от 61% до 94%) и 2022 года (по всем вариантам, использованным в регионе от 53% до 97%, процент выполнения открытого варианта процент выполнения от 54% до 98%).

Процент выполнения заданий с кратким ответом повышенного уровня сложности (задания 4, 8 – 11) в 2023 году составил по всем вариантам от 60% до 77%, что немного ниже результата 2022 года от 66% до 81% и выше результата 2021 г. от 52% до 73%. Процент выполнения заданий по открытому варианту составил от 53% до 74%, что ниже результатов за два предыдущих года (в 2022 г. от 61% до 80% и в 2021 г. от 54% до 90%).

Процент выполнения заданий с развернутым ответом, повышенного и высокого уровней сложности (задания 12–18) составил от 1% до 37% по всем вариантам, использованным в регионе и соответственно процент выполнения открытого варианта от 1% до 35%. В сравнении с предыдущим годом этот результат оказался ниже (в 2022 г. процент выполнения по всем вариантам составил от 1% до 45% и открытого варианта от

1% до 46%). Результат 2023 г. оказался сопоставим с результатом 2021 г. (процент выполнения по всем вариантам от 1% до 37% и открытого варианта от 1% до 39%).

Отметим, что задания повышенного и высокого уровня 13, 15, 16 и 17 оказались с процентом выполнения ниже 15. Самый низкий процент выполнения – это геометрические задания 13 (1%) и 16 (2%). Задание 17 (5%) продемонстрировало умение решать систему уравнений с параметром и задачи экономического характера 15 (7%).

Успешно усвоенные элементы содержания – это задание 12 повышенного уровня (решение тригонометрического уравнения), процент выполнения составил 37. А также задание высокого уровня 18 (задача олимпиадного характера), процент выполнения составил 17.

Содержательный анализ выполнения заданий КИМ по математике на профильном уровне проводился на основании результатов, полученных экзаменуемыми в 2021, 2022 и 2023 гг. А также с учетом изменений структуры заданий в КИМ 2023 года по сравнению с 2022 годом.

Экзаменационная работа по математике на профильном уровне состоит из двух частей и включает в себя 18 заданий, которые различаются по содержанию, сложности и количеству заданий:

- часть 1 содержит 11 заданий (задания 1–11) с кратким ответом в виде целого числа или конечной десятичной дроби;
- часть 2 содержит 7 заданий (задания 12–18) с развёрнутым ответом (полная запись решения с обоснованием выполненных действий).

Анализ выполнения заданий с кратким ответом (1-11). Части 1 проведен по проверяемым умениям открытого варианта.

Задания 1 и 2 проверяли умения выполнять действия с геометрическими фигурами.

Процент выполнивших задание верно:

Год	2021	2022	2023
Задание 1	59%	92%	73%
Задание 2	62%	77%	61%

Примечание: задания 1 и 2 (2023 г.) аналогичны заданиям 3 и 5 (2022 г.) и заданиям 6 и 8 (2021 г.).

Результаты, полученные участниками экзамена за решение задания 1, демонстрируют среднюю (73%) степень овладения базовыми навыками решения планиметрических, связанных с нахождением площади трапеции.

Более половины участников экзамена за последние три года успешно справляются с решением стереометрической задачи 2. Процент выпускников, выполнивших верно данное задание, вырос с 62 % в 2021 г. до 77% в 2022 г., но в 2023 г. результат выполнения такого типа заданий стал гораздо ниже и составил 61%.

При решении геометрических задач выпускники допускали следующие типичные ошибки:

- в задании 1 экзаменуемые допускали вычислительные ошибки в нахождении площади трапеции, а также ошибки, связанные с неверным чтением чертежа;
- ошибки в задании 2 связаны с незнанием формулы объема цилиндра и объема шара, а также вычислительные ошибки при работе с формулой объема цилиндра.

Задания 3 и 9 проверяли умение строить и исследовать простейшие математические модели.

Процент выполнивших задание верно:

Год	2021	2022	2023
Задание 3	95%	94%	95%

Задание 9	66%	61%	68%
------------------	-----	-----	-----

Примечание: задания 3 и 9 КИМ 2023 г. аналогичны заданиям задание 2 и 8 КИМ 2022 г. аналогично заданиям 4 и 11 КИМ прошлых лет.

Результаты, полученные участниками экзамена за решение задания 3, демонстрируют на протяжении последних трех лет стабильно высокую степень овладения базовыми навыками решения задач по теории вероятностей. Вместе с тем наблюдалось снижение результатов, полученных выпускниками за решение текстовых задач, с 66% в 2021г. до 61% в 2022 г. Вместе с тем следует отметить, что результаты незначительно улучшились в 2023 г. до 68%.

При решении задач, требующих построения и исследования простейших математических моделей, выпускники допускали следующие типичные ошибки:

- при выполнении задания 3 обучающиеся либо не смогли применить формулу для вычисления вероятности события, что спортсмен, выступающий первым, окажется из Великобритании, либо, записав верно формулу, допускали вычислительные ошибки;
- типичные ошибки в задании 9 связаны с невнимательным чтением условия текстовой задачи и составления математической модели по условию задачи, а также вычислительные ошибки при решении уравнения (математической модели) и нахождении сколько деталей в час изготавливал первый рабочий, если известно, что он за час изготавливал на 7 деталей больше второго.

Задания 4 и 8 проверяли умения использовать приобретенные знания и умения в практической деятельности и повседневной жизни. Задание 4 (добавлено в КИМ с 2022 г.), проверяющее умение моделировать реальные ситуации на языке теории вероятностей и статистики, вычислять вероятности различных событий.

Процент выполнивших задание верно:

Год	2021	2022	2023
Задание 4	-	73%	77%
Задание 8	66%	79%	71%

Примечание: задание 8 КИМ 2023 г. аналогично заданию 7 КИМ 2022 г. и заданию 10 КИМ прошлых лет. Задание 4 аналогично заданию 10 КИМ 2022 г., ранее не использовалось в КИМ прошлых лет.

Результаты, полученные участниками экзамена за решение задания 4, показывают положительную динамику от 73% до 77%. Ежегодно экзаменуемые демонстрировали положительную динамику овладения базовыми умениями необходимыми при выполнении практико-ориентированного задания 8. Однако в 2023 г. процент выполнения данного задания на 8% стал ниже по сравнению с 2022 г.

Следует отметить, что выпускники при решении данных задач допускали следующие ошибки:

- при выполнении задания 4 допускались ошибки в неверном применении формулы для вычисления вероятности того, что стрелок попадет в две первые мишени и не попадет в две последние;
- при выполнении задания 8 допускались ошибки в работе с формулой при нахождении значений одного из параметров (определение частоты отраженного сигнала, если скорость погружения батискафа равна 20 м/с), ошибки, связанные с невнимательным чтением условия или с непониманием текста задачи, а также ошибки в тождественном преобразовании выражения.

Задание 5 проверяло умение решать уравнения.

Процент выполнивших задание верно:

Год	2021	2022	2022
Задание 5	95%	98%	97%

Примечание: задание 5 КИМ 2023 г. аналогичное заданию 1 КИМ 2022 г. и заданию 5 КИМ прошлых лет.

Результаты, полученные выпускниками за решение задания 1, демонстрируют на протяжении последних трех лет стабильно высокую степень, более 95% владения базовыми навыками решения уравнений различных типов. Следует отметить, что 3% экзаменуемых допустили вычислительные ошибки в нахождении корня показательного уравнения.

Задание 6 проверяло умение выполнять вычисления и преобразования.

Процент выполнивших задание верно:

Год	2021	2022	2023
Задание 6	73%	54%	85%

Примечание: задание 6 КИМ 2023 г. аналогично заданию 4 КИМ 2022 г. и заданию 9 КИМ прошлых лет.

Результаты, полученные экзаменуемыми за решение задания 6, показывают, что 85% учащихся справились с нахождением значения выражения, содержащего логарифмы. Процент выпускников, выполнивших верно данное задание вырос на 31% по сравнению с 2022 г. Возможно, это связано с тем, что работа с логарифмическим выражением оказалась более доступна большей части выпускников, чем работа с тригонометрическим тождеством в 2022 г.

15% экзаменуемых допустили ошибки, связанные с неверным использованием свойств логарифма и самим понятием логарифма.

Задания 7, 10 и 11 проверяли умения выполнять действия с функциями.

Процент выполнивших задание верно

Год	2021	2022	2023
Задание 7	67%	70%	75%
Задание 10	-	80%	65%
Задание 11	52%	69%	60%

Примечание: задание 7 и 11 КИМ 2023 г. аналогично заданию 6 и 11 КИМ 2022г. и заданиям 7 и 12 КИМ прошлых лет. Задание 10 КИМ 2023 г. аналогично заданию 9 КИМ 2022 г. Ранее такого вида задание не использовалось в КИМ прошлых лет.

Результаты, полученные участниками экзамена за решение заданий 7 показывают положительную динамику выполнения от 67 % до 75% за три последних года, что свидетельствует о том, что участники экзамена успешно справляются с решением задач, требующих применения действий с функциями. Вместе с тем наблюдается снижение результатов, полученных выпускниками за решение задания 11 – с 69% в 2022 г. до 60%.

Типичные ошибки при выполнении данного вида заданий связаны с невнимательным чтением условия задания, а также неверным применением производной к исследованию функции.

Экзаменуемые также показали невысокий результат выполнения задания 10 – 65%.

На основании проведенного анализа результатов выполнения заданий с кратким ответом, следует отметить проблемные зоны при выполнении данного типа заданий:

- невысокий уровень базовой логической культуры и читательской грамотности (неверное понимание, неполное или невнимательное чтение условия);
- слабое владение теоретическим материалом;
- вычислительные ошибки.

Контрольно-измерительные материалы по математике Части 2 включали семь заданий с развернутым ответом (12-18), требующие полной записи решения с обоснованием выполненных действий, из которых пять заданий (12-16) повышенного и два задания (17-

18) высокого уровня сложности, предназначенные для более точной дифференциации абитуриентов вузов.

Анализ выполнения заданий с развернутым ответом показывает, что по традиции наиболее решаемым оказалось задание 12, в котором необходимо было решить тригонометрическое уравнение

$$\cos x \cdot \cos 2x = \sqrt{2} \sin^2 x + \cos x$$

и указать корни уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{5\pi}{2}; -\pi\right]$.

В части а) учащимся надо было выполнить необходимые тождественные преобразования, прийти к совокупности двух простейших тригонометрических уравнений. Решив полученную совокупность, экзаменуемые должны были найти множество всех корней исходного уравнения.

В части б) учащимся необходимо было провести отбор корней, принадлежащих указанному отрезку. Эту задачу можно было выполнить: с помощью единичной окружности; с помощью графика тригонометрической функции; с использованием метода подбора; с помощью составления и решения двойных неравенств.

Характеризуя задание 12, следует отметить, что решение данной задачи требует знания тригонометрических формул, стандартных приёмов решения тригонометрических уравнений и способов отбора корней. Большинство из обучающихся приступили к выполнению данной задачи.

Процент выполнивших задание:

Год	2021	2022	2023
1 балл	9%	10%	6%
2 балла	33%	46%	35%

Примечание: задание 12 КИМ 2022 г. аналогично заданию 13 КИМ прошлых лет.

Сравнивая показатели выпускников, получивших полный балл за решение задания 12, за последние три года, следует отметить, что имеется спад результатов по отношению к результатам 2022 г., однако по сравнению с 2021 г. – результат стал немного выше. Процент учащихся, получивших 1 балл, аналогично уменьшился с 9% в 2021 г. до 6% в 2023 г.

Основные ошибки и проблемы, возникшие при решении задания 12:

- незнание тригонометрических тождеств и ошибки при их использовании;
- ошибки при решении простейших тригонометрических уравнений;
- незнание табличных значений синуса и косинуса некоторых углов;
- вычислительные ошибки;

- ошибки при отборе корней: указание корней, не принадлежащих данному промежутку; неверное указание дуг, соответствующих указанному промежутку; указание недостаточного числа корней в методе подбора.

Анализируя ошибки, следует отметить, что на протяжении последних трех лет типичными в регионе остаются ошибки при решении простейших тригонометрических уравнений, незнание табличных значений тригонометрических функций некоторых углов, неумение правильно отметить дугу на окружности, соответствующую указанному в условии промежутку. Исходя из этого, необходимо учителям обратить особое внимание на отработку этих навыков при решении различных типов задач, в которых необходимо решать тригонометрические уравнения.

Задание 13 – это стереометрическая задача: В основании прямой призмы $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ лежит равнобедренная трапеция $ABCD$ с основаниями $AD = 3$ и $BC = 2$. Точка M делит ребро $A_1 D_1$ в отношении $A_1 M : M D_1 = 1 : 2$, а точка K – середина ребра DD_1 .

- а) Докажите, что плоскость MKC параллельна прямой BD .

б) Найдите тангенс угла между плоскостью MKC и плоскостью основания призмы, если угол MKC равен 90° , угол ADC равен 60° .

Процент выполнивших задание:

Год	2021	2022	2023
1 балл	3,23%	1,6%	1,8%
2 балла	0,5%	0,2%	0%
3 балла	-	0,3%	0,2%

Примечание: задание 13 КИМ 2023 г. аналогично заданию 14 КИМ прошлых лет. Данное задание с 2022 года оценивается максимально 3 балла, ранее 2 балла.

Как показывают результаты, к решению стереометрической задачи приступает по-прежнему незначительное число выпускников, всего 2%. Сравнивая показатели учащихся, получивших полный балл за решение задания 13 за последние три года, следует отметить, что имеется незначительное снижение результатов. Вместе с тем, процент учащихся, получивших 1 балл, чуть стал выше – с 1,6 % в 2022 г. до 1,8% в 2023 г., однако этот показатель ниже 2021 г. Два балла не набрал ни один из учащихся, а три балла лишь 0,2%, что ниже, чем в 2022 г.

Большинство экзаменуемых, приступивших к решению стереометрической задачи, справились только с одним из двух пунктов.

Типичные ошибки, допущенные учащимися при решении задачи 13:

1. неверно поняли условие задачи/невнимательно прочитали условие задания;
2. незнание свойств и признаков параллельности прямой и плоскости;
3. неверное использование теоремы косинусов;
4. вычислительные ошибки.

Полученные выпускниками результаты показывают, что стереометрическая задача в 2023 г. оказалась самой сложной, как и в прошлые годы. Как показывает анализ работ, для успешного решения геометрических задач, необходима не только хорошая математическая подготовка, но и умение логически рассуждать и четко излагать свои мысли. Следует рекомендовать, помимо решения задач из открытого банка ЕГЭ, включать в процесс обучения задачи, требующие видения геометрических фигур, задачи, развивающие геометрическую интуицию; уделять больше внимания содержательным геометрическим задачам, развивающим видение геометрических конструкций и требующим применения вычислительных навыков.

В задании 14 экзаменуемым необходимо было решить неравенство

$$\log_{0,5}(x^3 - 3x - 9x + 27) \leq \log_{0,25}(x - 3)^4.$$

Процент выполнивших задание:

Год	2021	2022	2023
1 балл	0,8%	0,7%	0,2%
2 балла	26%	37%	18,2%

Примечание: задание 14 КИМ 2023 г. аналогично заданию 14 КИМ 2022 г. и заданию 15 КИМ прошлых лет.

Сравнивая показатели учащихся, получивших полный балл за решение задания 14 за последние три года, следует отметить, что в 2023 г. имеется значительное снижение результатов по отношению к результатам прошлых лет.

Решая логарифмическое неравенство, экзаменуемые допустили следующие ошибки:

- ошибки при преобразовании левой части неравенства, где необходимо было использовать свойства логарифмов;
- ошибки при решении неравенства методом интервалов;
- ошибки при решении неравенства, содержащего логарифмическую функцию;

- вычислительные ошибки.

Как показывает анализ работ, при решении такого типа неравенств у большинства выпускников возникли трудности не с решением логарифмического неравенства, а с решением алгебраического неравенства и с выполнением алгоритма метода интервалов. Исходя из анализа, следует рекомендовать включать как в процесс обучения, так и в процесс подготовки к ЕГЭ различные типы неравенств, требующих применения алгоритма метода интервалов.

Задание 15 – текстовая задача, при решении которой необходимо построить математическую модель конкретной ситуации. В этом задании усилена сюжетная, практико-ориентированная составляющая условия:

В июле 2025 года планируется взять кредит на десять лет в размере 500 тыс. рублей. Условья его возврата таковы:

- каждый январь долг будет возрастать на 30% по сравнению с концом предыдущего года;

- с февраля по июнь каждого года необходимо оплатить одним платежом часть долга;

- платежи в 2026, 2027, 2028, 2029 и 2030 годов должен быть на какую-то одну и ту же величину меньше долга на июль предыдущего года;

- в июле 2031, 2032, 2033, 2034 и 2035 годов должен быть на другую одну и ту же величину меньше долга на июль предыдущего года;

- к июлю 2035 года долг должен быть выплачен полностью.

Известно, что сумма всех платежей после полного погашения кредита будет равна 1250 тыс. рублей. Сколько рублей составит платёж 2035 году?

Для решения данной задачи учащимся необходимо было построить математическую модель и провести ее исследование.

Процент выполнивших задание:

Год	2021	2022	2023
1 балл	1,6%	3,4%	4,9%
2 балла	1,7%	23,9%	6,3%
3 балла	19%	-	-

Примечание: задание 15 КИМ 2023 г. аналогично заданию 15 КИМ 2022 г. и заданию 17 КИМ прошлых лет. Данное задание с 2022 года оценивается максимально 2 балла, ранее 3 балла.

Сравнивая показатели учащихся за последние три года, которые верно составили математическую модель, исследовали ее, пришли к правильному ответу и получили полный балл за решение задания, отмечаем, что в 2023 г. имеется значительное снижение результатов по отношению к результатам 2022 г. и результатам 2021 г.

Процент учащихся, которые правильно составили математическую модель, приступили к ее исследованию и получили за решение один балл увеличился с 1,6% в 2021 г. до 4,9% в 2023 г. Процент учащихся, получивших полный балл снизился с 23,9% (2022 г.) до 6,3% (2023 г.).

Как и в предыдущий год, одной из самых распространённых ошибок, допущенных при решении задачи, является непонимание школьниками разницы между понятием процента и коэффициента увеличения долга.

Часть экзаменуемых, правильно составив математическую модель и подставив в неё числовые данные из условия задачи, либо не смогла прийти к линейному уравнению с верными коэффициентами, либо, получив нужное уравнение, решила его неправильно из-за вычислительных ошибок.

Анализируя работы выпускников, приступивших к выполнению задания 15, следует рекомендовать и в процессе обучения, и в процессе подготовки к ЕГЭ больше уделять

внимания развитию умения проводить логические рассуждения, чётко и грамотно излагать свои мысли при описании и составлении математической модели.

Задание 16, как и в предыдущие годы являлась планиметрической задачей, состоящей из двух частей:

Прямая перпендикулярная стороне BC ромба $ABCD$, пересекает его диагональ AC в точке M , а диагональ BD в точке N , причем $AM:MC = 1:2$, $BN:ND = 1:3$.

а) Докажите, что прямая MN делит сторону ромба BC в отношении $1:3$.

б) Найдите сторону ромба, если $MN = \sqrt{6}$.

К выполнению задачи 16 приступало всего 4,6% участников ЕГЭ.

Процент выполнивших задание:

Год	2021	2022	2023
1 балл	2,1%	4%	3,5%
2 балла	0,1%	0,3%	0,04%
3 балла	0,6%	1,2%	1,0%

Примечание: Задание 16 КИМ 2023 г. соответствует заданиям КИМ прошлых лет и в содержании, и в оценивании.

Сравнивая показатели учащихся, получивших полный балл за решение задания 16 за последние три года, следует отметить, что процент выполнивших правильно данную задачу в 2023 г. немного снизился по отношению к 2022 году и незначительно увеличился по отношению к 2021 году.

При решении задачи 16 учащиеся допустили следующие ошибки:

1. неправильно выполняли геометрические построения;
2. при доказательстве пункта а) использовали факты, являющиеся следствием доказываемого утверждения;
3. при решении пункта б) пользовались неочевидными утверждениями без доказательства.

Результаты показывают, что планиметрическая задача также, как и стереометрическая, в 2023 г. оказалась для участников сложнее по сравнению с прошлым годом. Как показывает анализ работ и допущенные ошибки, для успешного решения геометрических задач необходима не только хорошая математическая подготовка, но и умение логически рассуждать и четко излагать свои мысли. Следует рекомендовать, помимо решения задач из открытого банка ЕГЭ, включать в процесс обучения: задачи, требующие видения геометрических фигур; задачи, развивающие геометрическую интуицию; уделять больше внимания содержательным геометрическим задачам, развивающим видение геометрических конструкций, требующим четкого изложения доказательства и применения вычислительных навыков.

Задание 17 – это задача с параметром, оцениваемая в четыре балла. В этом году экзаменуемым необходимо было решить систему уравнений:

Найдите все значения a , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} (x^2 - 5x - y + 3) \cdot \sqrt{x - y + 3} = 0, \\ y = ax + a \end{cases}$$

имеет ровно два различных корня.

Данную задачу можно было решить как графическим, так и аналитическим способом.

При аналитическом способе решения выпускники должны были преобразовать первое уравнение системы. Затем решив два уравнения, определить значения параметра, при которых исходная система уравнений имеет два различных корня.

При графическом способе решения после преобразования первого уравнения получить равенства, задающие пару лучей. Затем проанализировать их взаимное расположение и определить значения параметра, при которых система имеет два различных корня.

Процент выполнивших задание:

Год	2021	2022	2023
1 балл	3,1%	4,9%	5,6%
2 балла	0,2%	0,5%	1,7%
3 балла	0,03%	0,1%	0,3%
4 балла	0,7%	2,3%	2,3%

Примечание: задание 17 КИМ 2022 г. аналогично заданию 18 КИМ прошлых лет.

Сравнивая показатели учащихся, получивших четыре балла за решение задания 17 за последние три года, следует отметить, что процент выполнивших правильно данную задачу остается невысоким. Следует отметить, что возрос процент обучающихся, получивших за решение задачи от одного до трех баллов по сравнению с результатами 2021 г. и 2022 г.

Ошибки, которые выпускники допускали наиболее часто:

- ошибки в преобразованиях, в которых необходимо использовать определение квадратного корня;

- решая уравнение, участники не учитывали необходимые ограничения;

- вычислительные ошибки.

Анализируя работы, следует отметить, что большая часть выпускников отдали предпочтение графическому способу решения данной задачи. Несмотря на незначительное улучшение показателей, следует рекомендовать обращать внимание в процессе обучения и подготовки к ЕГЭ на то, что для решения подобного типа задач могут быть применены различные методы и приемы, комбинируя которые возможно получить верный результат. При этом отрабатывать умение логически рассуждать и четко излагать свои мысли.

Последнее из заданий (18 задача) – это сложная задача олимпиадного типа, требующая от экзаменуемых строгих логических рассуждений. В контрольно-измерительных материалах этого года предложена задача следующего вида:

Из пары натуральных чисел $(a;b)$, где ab , за один ход получают пару $(a+b ; a-b)$.

а) Можно ли за несколько таких ходов получить пары $(100;1)$ пару, большее число которой в которой равно 400?

б) Можно ли за несколько таких ходов получить из пары $(100;1)$ пару $(806;788)$?

в) Какое наименьшее a может быть в паре $(a;b)$, из которой за несколько ходов можно получить пару $(806;788)$?

Процент выполнивших задание:

Год	2021	2022	2023
1 балл	29,9%	20,8%	28,2%
2 балла	10,4%	1,4%	11,8%
3 балла	0,2%	0,1%	2,7%
4 балла	0,3%	0,3%	3,4%

Примечание: задание 18 КИМ 2023 г. аналогично заданию 18 КИМ 2022 г. и 19 КИМ прошлых лет.

Как показывает статистика, число выпускников, притупивших к решению задания 18, возросло в 2023 г. Сравнивая показатели учащихся, получивших четыре балла за решение задания 18 за последние три года, следует отметить, что процент выполнивших данную задачу в 2023 году стал выше. Процент учащихся получивших 4 балла возрос с 2021 года на 3,1%. Возросло и число учащихся, набравших 1, 2, или 3 балла.

Анализируя работы выпускников и полученные ими результаты, следует отметить, что по-прежнему основной проблемой решения задания 18 является неумение провести полное обоснование доказываемого утверждения.

Если в части (а) достаточно было в качестве обоснования привести пример и с этим справились 28,2% учащихся, то выполняя часть (б), многие из приступивших к этой части задания приводили лишь правильный ответ, не сопровождая его каким-либо обоснованием. Тем не менее 11,8% учащихся выполнили части (а) и (б) верно, что значительно превышает результаты предыдущих лет.

К типичным ошибкам учащихся следует отнести то, что в своих решениях, приводя обоснования верных ответов, пропускали важные шаги рассуждений, от чего нарушалась логика доказательства.

Следует отметить, что процент выполнения заданий повышенного и высокого уровней сложности, предполагающих свободное владение материалом курса математики, находится в регионе на невысоком уровне.

Анализируя результаты, полученные выпускниками, следует рекомендовать использовать при итоговом повторении и подготовке к ЕГЭ использовать задачи из открытого банка заданий, внедрять онлайн-тренажеры.

Большая часть образовательных организаций, использовали УМК под редакцией авторов Л.С. Атанасяна (геометрия) и А.Г. Мордковича (алгебра и начала анализа), а остальные образовательные организации в своей практике использовали УМК и других авторов, согласно Федеральному перечню учебников.

В УМК, используемых в образовательных организациях региона, по алгебре и началам анализа Ю.М. Колягина, А.Г. Мордковича, С.М. Никольского и УМК по геометрии Л.С. Атанасяна содержится достаточный теоретический и практический материал для решения заданий 12 – 16 Части 2. Однако для решения заданий 17-18 необходимо использовать как дополнительную литературу, так и материалы, размещенные на сайте ФИПИ (<http://www.fipi.ru/>), так и лучшие педагогические практики учителей региона по решению данных заданий.

Анализ метапредметных результатов обучения, повлиявших на выполнение заданий КИМ

Согласно ФГОС СОО, должны быть достигнуты не только предметные, но и метапредметные результаты, характеризующиеся овладением познавательных, коммуникативных и регулятивных универсальных учебных действий (УУД). Сформированные УУД позволили экзаменуемым выполнить задания КИМ.

Познавательные универсальные учебные действия (базовые логические, базовые исследовательские и умение работать с информацией):

- базовые логические действия, например, проводить самостоятельно доказательства математических утверждений. Обучающиеся продемонстрировали данные действия при выполнении геометрических заданий 13 и 16, где необходимо доказать, что плоскость MKC параллельна прямой BD и соответственно, что прямая MN делит сторону ромба BC в отношении 1: 4 и получить 1 балл. Следует отметить, что только у небольшой части экзаменуемых 1,8% (13) и 3,5% (16) сформировано данное учебное действие. А учебное действие — выстраивать аргументацию, приводить примеры и контрпримеры, обосновывать собственные суждения и выводы, сформировано у 3,4% участников при выполнении задачи 18 высокого уровня сложности (получивших полный балл — 4 балла). Сравнительно показатели учащихся за последние три года, следует отметить, что процент выполнивших данную задачу в 2023 году стал выше. Процент учащихся, получивших 4 балла, возрос с 2021 года на 3,1%. Возросло и число учащихся, набравших 1, 2, или 3 балла;

- базовые исследовательские умения, например, прогнозировать возможное развитие процесса, а также выдвигать предположения о его развитии в новых условиях продемонстрировали обучающиеся при решении прикладной математической задачи

экономического содержания (задание 15 повышенного уровня сложности), при решении которой необходимо построить математическую модель конкретной ситуации и провести ее исследование. Процент учащихся, которые правильно составили математическую модель, приступили к ее исследованию и получили за решение один балл, который увеличился с 1,6% в 2021 г. до 4,9% в 2023 г. Однако это невысокий результат, что повлияло на получение полного балла (2 балла) за решение такого рода заданий, всего 6,3% экзаменуемых. При выполнении практико-ориентированных задач, затруднения у обучающихся вызывают: способность моделировать, анализировать и преобразовывать информацию, работать с рисунком, таблицей, а также интерпретировать полученные результаты;

- умения работать с информацией, например, структурировать информацию, представлять ее графически. Анализируя работы, следует отметить, что большая часть выпускников отдала предпочтение графическому способу решения задания 17 высокого уровня сложности и тем самым верно нашли значения параметра a , при каждом из которых заданная система уравнений

$$\begin{cases} (x^2 - 5x - y + 3) \cdot \sqrt{x - y + 3} = 0, \\ y = ax + a \end{cases}$$

имела ровно два различных корня. Средний процент выполнения задания 17 в 2023 году составил 5%, что выше, чем в 2022 году (4%).

Коммуникативные универсальные учебные действия (общение):

- умение общения, например, выражать свою точку зрения в письменных текстах, давать пояснения по ходу решения задачи, комментировать полученный результат. Это умение относится к заданиям 12-18 с развернутым ответом Части 2 КИМ по математике. В сравнении с предыдущим 2022 годом, результат выполнения данных заданий оказался ниже на 8% (в 2022 г. процент выполнения по всем вариантам составил до 45%, в а 2023 году до 37%). Результат 2023 году оказался сопоставим с результатом 2021 года.

Регулятивные универсальные учебные действия (самоорганизация и самоконтроль):

- умение самоорганизации, например, выбирать способ решения задачи с учетом собственных возможностей. Задание 17 продемонстрировало сформированное умения выбора способа решения (аналитический или графический). Анализируя работы, следует отметить, что большая часть выпускников отдала предпочтение графическому способу решения данной задачи и верно выполнили данное задание;

- умение самоконтроля, например, оценивать соответствие результата условиям задачи, находить ошибку. Данное умение должно быть сформировано у обучающихся при выполнении всех заданий КИМ 1-18. Анализируя средний процент выполнения заданий, отмечаем, что данное регулятивное УУД сформировано у высокого процента обучающихся, верно выполнивших задания с кратким ответом, это задания 3 (95%), 5 (97%), 6 (85%).

Достижения метапредметных результатов влияет на успешность выполнения заданий КИМ по математике на профильном уровне. Следовательно, учителю необходимо формировать у обучающихся опыт поиска путей решения математических задач, учить математическому моделированию реальных ситуаций и переносить способы решения учебных задач на реальные объекты.

ВЫВОДЫ об итогах анализа выполнения заданий, групп заданий:

Перечень элементов умений, усвоенных в процессе обучения, выпускниками региона в целом можно считать достаточным на базовом уровне:

- уметь строить и исследовать простейшие математические модели;
- уметь решать уравнения и неравенства;
- уметь выполнять преобразования и вычисления.

Перечень элементов умений, усвоение которых школьниками региона в целом нельзя считать достаточным, на базовом уровне не выявлен. Процент выполнения всех заданий части 1 выше 60%.

К заданиям, которые проверяют умение выполнять действия с функциями, относится, например, задание 11 (на нахождение экстремальных значений функции) – задание повышенного уровня части 1, которое традиционно вызывает трудности у школьников. Процент выполнения данного задания составил 60% по всем вариантам, использованным в регионе и всего 52% по открытому варианту. Задание проверяло сформированность умения использовать производную для исследования функции. Для выполнения этого задания нужно знать связь производной со свойствами функции и уметь находить производную функции. Поэтому, необходимо учить школьников в полном объеме исследованию функции с помощью производной.

Нельзя не отметить и тот факт, что даже при сформированных умениях недостаточная внимательность приводит к ошибкам: запись ответа не на поставленный вопрос. Такие ошибки наиболее характерны при выполнении данного задания 11.

Следует отметить невысокий процент выполнения геометрических заданий 13 и 16 части 2 (повышенного уровня), что свидетельствует о сохраняющихся системных недостатках в преподавании геометрии в основной школе и недостаточном уровне формирования умения выполнять действия с геометрическими фигурами. Также причиной является рассмотрение лишь тех типов задач, которые встречались на экзамене в предыдущие годы, вместо полноценного изучения геометрии.

Как показывает анализ работ и допущенные ошибки, для успешного решения геометрических задач необходима не только хорошая математическая подготовка, но и умение логически рассуждать и четко излагать свои мысли. Следует рекомендовать, помимо решения задач из открытого банка ЕГЭ, включать в процесс обучения: задачи, требующие видения геометрических фигур и знания их свойств и признаков; задачи, развивающие геометрическую интуицию; уделять большее внимание содержательным геометрическим задачам, развивающим видение геометрических конструкций, требующим четкого изложения доказательства и применения вычислительных навыков.

КИМ ЕГЭ 2023 года (профильный уровень) в сравнении с КИМ прошлых лет содержит ряд изменений в структуре заданий, которые представлены в спецификации КИМ на сайте ФИПИ <http://www.fipi.ru/>.

Анализ результатов выполнения заданий ЕГЭ 2023 г. по математике обучающимися Владимирского региона показывает, что использованные КИМ в целом соответствуют целям проведения экзамена, позволяя дифференцировать выпускников с различной мотивацией и уровнем подготовки по ключевым разделам курса математики.

При выполнении практико-ориентированных задач (3,4,8,15,18), затруднения у обучающихся вызывают: способность моделировать, анализировать и преобразовывать информацию, работать с рисунком, таблицей, а также интерпретировать полученные результаты, что говорит о недостаточном уровне сформированности функциональной математической грамотности у той части обучающихся, которые не приступили или не выполнили верно задания данного типа.

2.4. Методические рекомендации по выполнению заданий с развернутым ответом ЕГЭ (профильный уровень)

Приведем решение и критерии оценивания заданий с развернутым ответом открытого варианта КИМа ЕГЭ по математике профильного уровня.

Задание 12.

а) Решите уравнение $\cos x \cdot \cos 2x = \sqrt{2} \sin^2 x + \cos x$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{5\pi}{2}; -\pi\right]$.

Решение.

а) Преобразуем исходное уравнение, используя формулу понижения степени $2 \sin^2 x = 1 - \cos 2x$, следующим образом:

$$\begin{aligned}\sqrt{2} \sin^2 x + \cos x - \cos x \cdot \cos 2x &= 0, \\ \sqrt{2} \sin^2 x + \cos x (1 - \cos 2x) &= 0, \\ \sqrt{2} \sin^2 x + \cos x \cdot 2 \sin^2 x &= 0, \\ \sin^2 x (\sqrt{2} + 2 \cos x) &= 0.\end{aligned}$$

Данное уравнение равносильно совокупности двух уравнений

$$\begin{aligned}\sin^2 x = 0 \quad \text{или} \quad \sqrt{2} + 2 \cos x &= 0, \\ \sin x = 0 \quad \text{или} \quad \cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}.\end{aligned}$$

Решением первого уравнения является множество $x = \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, а решением второго уравнения

$$\begin{aligned}x &= \pm \arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}, \\ x &= \pm \left(\pi - \arccos\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}, \\ x &= \pm \left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}, \\ x &= \pm \frac{3\pi}{4} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.\end{aligned}$$

Итак, решением исходного уравнения являются

$$x = \pi n, \quad x = \pm \frac{3\pi}{4} + 2\pi k,$$

где $n, k \in \mathbb{Z}$.

б) Отберем корни, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{5\pi}{2}; -\pi\right]$, используя двойные неравенства.

Для $x = \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, получаем:

$$-\frac{5\pi}{2} \leq \pi n \leq -\pi, \quad -\frac{5}{2} \leq n \leq -1.$$

Целые n , удовлетворяющие данному неравенству, — это $n = -2$ и $n = -1$. Если $n = -2$, то $x = -2\pi$, а если $n = -1$, то $x = -\pi$.

Для $x = -\frac{3\pi}{4} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, имеем:

$$\begin{aligned}-\frac{5\pi}{2} \leq -\frac{3\pi}{4} + 2\pi k \leq -\pi, \quad -10\pi \leq -3\pi + 8\pi k \leq -4\pi, \\ -10 \leq -3 + 8k \leq -4, \quad -7 \leq 8k \leq -1, \quad -\frac{7}{8} \leq k \leq -\frac{1}{8}.\end{aligned}$$

Целых k , удовлетворяющих этому неравенству, нет, поэтому корней уравнения из множества $x = -\frac{3\pi}{4} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, принадлежащих отрезку $\left[-\frac{5\pi}{2}; -\pi\right]$.

Для $x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, находим:

$$\begin{aligned}-\frac{5\pi}{2} \leq \frac{3\pi}{4} + 2\pi k \leq -\pi, \quad -10\pi \leq 3\pi + 8\pi k \leq -4\pi, \\ -10 \leq 3 + 8k \leq -4, \quad -13 \leq 8k \leq -7, \quad -\frac{13}{8} \leq k \leq -\frac{7}{8}.\end{aligned}$$

Единственное целое k , удовлетворяющих последнему неравенству, из множества $x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi k$, — это $k = -1$, которому соответствует $x = \frac{3\pi}{4} - 2\pi = -\frac{5\pi}{4}$.

Ответ:

$$a) x = \pi n, n \in \mathbb{Z};$$

$$x = \pm \frac{3\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z};$$

$$b) -2\pi, -\frac{5\pi}{4}, -\pi.$$

Замечание. Отбор корней может быть произведён иными способами, например, с помощью единичной окружности или методом подбора.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте <i>a</i> ИЛИ получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения обоих пунктов: пункта <i>a</i> и пункта <i>b</i>	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	2

Задание 13.

В основании прямой призмы $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ лежит равнобедренная трапеция $ABCD$ с основаниями $AD = 3$ и $BC = 2$. Точка M делит ребро $A_1 D_1$ в отношении $A_1 M : MD_1 = 1 : 2$, а точка K – середина ребра DD_1 .

а) Докажите, что плоскость MKC параллельна прямой BD .

б) Найдите тангенс угла между плоскостью MKC и плоскостью основания призмы, если $\angle MKC = 90^\circ$, $\angle ADC = 60^\circ$.

Авторское решение.

а) Боковая грань $BCC_1 B_1$ призмы параллельна грани $ADD_1 A_1$, поскольку составляющие их рёбра соответственно параллельны. Проведём через вершину C прямую, параллельную KM . Пусть эта прямая пересекает ребро BB_1 в точке N (см. рисунок).

Прямоугольные треугольники CBN и $MD_1 K$ равны, поскольку равны их катеты BC и MD_1 , а также острые углы ввиду параллельности соответствующих сторон. Следовательно, $BN = D_1 K = \frac{1}{2} DD_1 = \frac{1}{2} BB_1$, а значит, точка N – середина ребра BB_1 . Значит, $BNKC$ – параллелограмм, а прямая NK , лежащая в плоскости MKC , параллельна прямой BD . Таким образом, плоскость MKC параллельна BD .

б) Пусть высота призмы равна $2x$. Тогда $B_1 N = BN = DK = x$.

В равнобедренной трапеции с основаниями 3 и 2 и углом 60° боковые стороны равны 1, то есть $AB = CD = 1$.

Из прямоугольных треугольников CBN , CDK и NCK имеем:

$$NC^2 = BN^2 + BC^2 = x^2 + 4, \quad CK^2 = CD^2 + DK^2 = x^2 + 1;$$

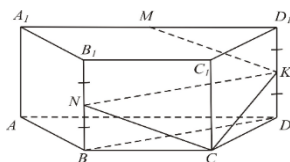
$$NK^2 = NC^2 + CK^2 = x^2 + 4 + x^2 + 1 = 2x^2 + 5.$$

Для треугольника BCD имеем:

$$BD^2 = BC^2 + CD^2 - 2BC \cdot CD \cdot \cos 120^\circ = 7.$$

Поскольку $NK = BD$, получаем: $2x^2 + 5 = 7$, откуда $x = 1$.

При пересечении плоскостей MKC и BCD плоскостью BDD_1 получены параллельные прямые BD и NK . Следовательно, прямая пересечения плоскостей MKC и BCD параллельна прямой BD и проходит через точку C . Плоскость, проходящая через точку C перпендикулярно прямой BD , в пересечении с плоскостями BCD и MKC образует линейный угол двугранного угла, образованного этими плоскостями.



Тангенс угла между плоскостью MKC и плоскостью BCD равен отношению расстояния от прямой NK до плоскости BCD , то есть x , и высоты h треугольника BCD , проведённой из вершины C .

Площадь треугольника BCD равна $\frac{h \cdot BD}{2} = \frac{h\sqrt{7}}{2}$. С другой стороны, эта площадь равна $\frac{BC \cdot CD \cdot \sin \angle BCD}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Следовательно, $h = \frac{\sqrt{21}}{7}$, а значит, искомым тангенс равен

$$\frac{x}{h} = \frac{\sqrt{21}}{3}.$$

Ответ: б) $\frac{\sqrt{21}}{3}$.

Данная задача может быть решена другим способом. Приведём два варианта решения.

Решение.

Построим сечение призмы $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ плоскостью, проходящей через точки M , K , C .

1. Соединим точки K и M ; K и C . $MK \in (AA_1 D_1)$, $MK \cap AA_1 = X$, $MK \cap AD = Y$, $XY \in (MKC)$.

2. Проведём CY : $CY \in (ABC)$, $AB \cap CY = Z$, $YZ \in (MKC)$.

3. $XZ \in (AA_1 B_1)$, $XZ \cap BB_1 = N$, $A_1 B_1 \cap XZ = P$.

4. Соединим точки C и N , N и P , P и M , $MKCNP$ – сечение призмы $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ плоскостью MKC .

а) 1. $\triangle KDY = \triangle KD_1 M$ по катету и острому углу, т.к. $\angle KDY = \angle KD_1 M = 90^\circ$, $KD = KD_1$ по условию, $\angle DKY = \angle D_1 KM$ как вертикальные, значит, $DY = D_1 M = 2$, а $AY = AD + DY$, $AY = 5$.

2. $\triangle XA_1 M \sim \triangle XAY$ по острому углу, т.к. $\angle XA_1 M = \angle XAY = 90^\circ$, $\angle AXM$ – общий, следовательно,

$$\frac{A_1 X}{AX} = \frac{A_1 M}{AY} = \frac{XM}{XY}; \quad \frac{A_1 X}{AX} = \frac{XM}{XY} = \frac{1}{5}; \quad AX = 5A_1 X.$$

3. $\triangle XA_1 P \sim \triangle XAZ$ по острому углу, т.к. $\angle XA_1 P = \angle XAZ = 90^\circ$, $\angle AXZ$ – общий, значит,

$$\frac{A_1 X}{AX} = \frac{A_1 P}{AZ}; \quad \frac{A_1 P}{AZ} = \frac{1}{5}; \quad AZ = 5A_1 P.$$

4. $\triangle BZC \sim \triangle AZY$ по двум углам, т.к. $\angle AZY$ – общий, $\angle CBZ = \angle DAZ$ как соответствующие углы при $BC \parallel AD$ и секущей AZ , значит,

$$\frac{BC}{AY} = \frac{BZ}{AZ}; \quad \frac{BZ}{AZ} = \frac{2}{5}; \quad AZ = \frac{5}{2}BZ; \quad AB = A_1 B_1 = \frac{3}{2}BZ.$$

$$5. \begin{cases} AZ = \frac{5}{2}BZ, \\ AZ = 5A_1 P, \end{cases} \quad \frac{5}{2}BZ = 5A_1 P, \quad A_1 P = \frac{1}{2}BZ.$$

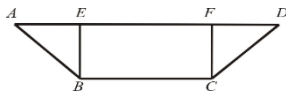
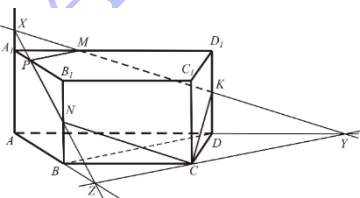
$$6. B_1 P = A_1 B_1 - A_1 P, \quad B_1 P = \frac{3}{2}BZ - \frac{1}{2}BZ = BZ.$$

7. $\triangle NBZ = \triangle NB_1 P$ по катету и острому углу, т.к. $\angle NBZ = \angle NB_1 P = 90^\circ$, $BZ = B_1 P$ по доказанному, $\angle ZBN = \angle ZB_1 N$ как вертикальные, следовательно, $BN = NB_1$.

8. $BN = NB_1$, $DK = KD_1$, $BB_1 \parallel DD_1$, значит, $NK \parallel BD$, $NK \in (MKC)$, и, следовательно, $BD \in (MKC)$.

б) 1. Проведём $CF \perp AD$, $BE \perp AD$, $DT \perp CY$.

2. $\triangle BEA = \triangle CFD$ по гипотенузе и катету, т.к. $BE = CF$



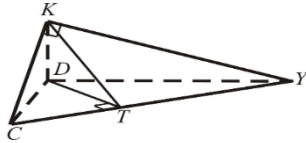
по построению, $AB = CD$ по условию, значит $BE = FC = \frac{1}{2}(AD - BC)$, $BE = \frac{1}{2} \cdot (3 - 2) = \frac{1}{2}$.

3. Из $\triangle CFD$, где $\angle CFD = 90^\circ$, имеем:

$$\cos \angle CDF = \frac{FD}{CD}, \quad CD = \frac{FD}{\cos \angle CDF}, \quad CD = \frac{\frac{1}{2}}{\cos 60^\circ} = 1.$$

4. Из $\triangle CDY$ по теореме косинусов:

$$\begin{aligned} CY^2 &= CD^2 + DY^2 - 2 \cdot CD \cdot DY \cdot \cos \angle CDY; \\ CY^2 &= CD^2 + DY^2 - 2 \cdot CD \cdot DY \cdot \cos(180^\circ - \angle ADC); \\ CY^2 &= 1^2 + 2^2 - 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 5 + 2 = 7; \quad CY = \sqrt{7}. \end{aligned}$$



5. Из $\triangle CDK$, где $\angle CDK = 90^\circ$, по теореме Пифагора имеем:

$$CK^2 = CD^2 + KD^2, \quad CK^2 = 1 + KD^2.$$

6. Из $\triangle KDY$, где $\angle KDY = 90^\circ$, по теореме Пифагора находим:

$$KY^2 = KD^2 + DY^2, \quad KY^2 = KD^2 + 2^2 = KD^2 + 4.$$

7. Из $\triangle CKY$, где $\angle CKY = 90^\circ$, по теореме Пифагора имеем:

$$\begin{aligned} CY^2 &= CK^2 + KY^2, \quad 7 = 1 + KD^2 + KD^2 + 4, \\ 2KD^2 &= 2, \quad KD^2 = 1, \quad KD = 1, \end{aligned}$$

тогда

$$CK^2 = 2, \quad CK = \sqrt{2}, \quad KY^2 = 1 + 4 = 5, \quad KY = \sqrt{5}.$$

8. Из $\triangle DTC$, где $\angle CTD = 90^\circ$, по теореме Пифагора находим:

$$DT^2 = CD^2 - CT^2, \quad DT^2 = 1 - CT^2.$$

9. Из $\triangle DTY$, где $\angle DTY = 90^\circ$, по теореме Пифагора имеем:

$$\begin{aligned} DT^2 &= DY^2 - TY^2, \quad DT^2 = DY^2 - (CY - CT)^2, \\ DT^2 &= 2^2 - (\sqrt{7} - CT)^2 = 4 - (7 - 2\sqrt{7}CT + CT^2) = \\ &= 4 - 7 + 2\sqrt{7}CT - CT^2 = 2\sqrt{7}CT - CT^2 - 3. \end{aligned}$$

10. $1 - CT^2 = 2\sqrt{7}CT - CT^2 - 3$, $2\sqrt{7}CT = 4$, $CT = \frac{2}{\sqrt{7}}$ и

$$DT^2 = 1 - \left(\frac{2}{\sqrt{7}}\right)^2 = 1 - \frac{4}{7} = \frac{3}{7}, \quad DT = \sqrt{\frac{3}{7}}.$$

11. Из $\triangle KDT$, где $\angle KDT = 90^\circ$, имеем:

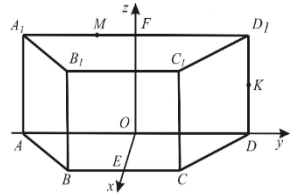
$$\operatorname{tg} \angle KTD = \frac{KD}{DT}, \quad \operatorname{tg} \angle KTD = \frac{1}{\sqrt{\frac{3}{7}}} = \sqrt{\frac{7}{3}}.$$

Ответ: б) $\sqrt{\frac{7}{3}}$.

Координатный метод.

Решение.

а) 1. Введём систему координат: $AO = OD = \frac{3}{2}$, $Ox \perp AD$, $Ox \cap BC = E$, $BE = EC = 1$, $OE = a$, $a > 0$, $Oy \subset AD$, $Oz \perp (ABC)$, $Oz \cap A_1D_1 = F$, $OF = b$, $b > 0$.



2. Найдём координаты точек: $A(0; -\frac{3}{2}; 0)$, $B(a; -1; 0)$, $C(a; 1; 0)$, $D(0; \frac{3}{2}; 0)$, $K(0; \frac{3}{2}; \frac{b}{2})$, $M(0; -\frac{1}{2}; b)$, т.к.

$$\frac{A_1M}{MD_1} = \frac{1}{2}, \quad MD_1 = 2A_1M, \quad \begin{cases} A_1D_1 = 3A_1M, \\ A_1D_1 = 2A_1F. \end{cases}$$

По условию $A_1D_1 = 3$, поэтому $A_1M = 1$, $A_1F = \frac{3}{2}$ и $FM = A_1F - A_1M$, $FM = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2}$.

3. Уравнение плоскости (MKC) : $A_0x + B_0y + C_0z + D_0 = 0$. Подставим координаты точек M , K , C в это уравнение и получим систему уравнений, которую решим методом сложения:

$$\begin{cases} aA_0 + B_0 + D_0 = 0, \\ \frac{3}{2}B_0 + \frac{b}{2}C_0 + D_0 = 0, \\ -\frac{1}{2}B_0 + bC_0 + D_0 = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} aA_0 + B_0 + D_0 = 0, \\ 3B_0 + bC_0 + 2D_0 = 0, \\ -\frac{1}{2}B_0 + bC_0 + D_0 = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} aA_0 + B_0 + D_0 = 0, \\ 3B_0 + bC_0 + 2D_0 = 0, \\ \frac{7}{2}B_0 + D_0 = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} D_0 = -\frac{7}{2}B_0, \\ aA_0 + B_0 - \frac{7}{2}B_0 = 0, \\ 3B_0 + bC_0 - 7B_0 = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} D_0 = -\frac{7}{2}B_0, \\ aA_0 - \frac{5}{2}B_0 = 0, \\ bC_0 - 4B_0 = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} D_0 = -\frac{7}{2}B_0, \\ A_0 = \frac{5}{2a}B_0, \\ C_0 = \frac{4}{b}B_0. \end{cases}$$

В таком случае уравнение плоскости (MKC) примет вид:

$$\frac{5}{2a}B_0x + B_0y + \frac{4}{b}B_0z - \frac{7}{2}B_0 = 0, \quad \frac{5}{2a}x + y + \frac{4}{b}z - \frac{7}{2} = 0, \\ \frac{5}{a}x + 2y + \frac{8}{b}z - 7 = 0.$$

4. Уравнение прямой BD :

$$\frac{x - x_B}{x_C - x_B} = \frac{y - y_B}{y_C - y_B} = \frac{z - z_B}{z_C - z_B}, \quad \frac{x - a}{0 - a} = \frac{y - (-1)}{\frac{3}{2} - (-1)} = \frac{z - 0}{0 - 0}, \\ \frac{x - a}{-a} = \frac{y + 1}{\frac{5}{2}} = \frac{z}{0}.$$

5. Нормальный вектор плоскости (MKC) : $\vec{n}(\frac{5}{a}; 2; \frac{8}{b})$, а направляющий вектор прямой BD : $\vec{s}(-a; \frac{5}{2}; 0)$. Скалярное произведение этих векторов равно

$$\vec{n} \cdot \vec{s} = \frac{5}{a} \cdot (-a) + 2 \cdot \frac{5}{2} + \frac{8}{b} \cdot 0 = 0,$$

значит угол между векторами \vec{n} и \vec{s} равен 90° , а прямая BD и плоскость (MKC) параллельны.

б) 1. По условию $\overrightarrow{KM} \perp \overrightarrow{KC}$, значит, скалярное произведение векторов $\overrightarrow{KM}(0; -2; \frac{b}{2})$ и $\overrightarrow{KC}(a; -\frac{1}{2}; -\frac{b}{2})$ равно нулю, т.е.

$$\begin{aligned} \overrightarrow{KM} \cdot \overrightarrow{KC} &= 0, \quad 0 \cdot a + (-2) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{b}{2} \cdot \left(-\frac{b}{2}\right) = 0, \\ 1 - \frac{b^2}{4} &= 0, \quad \frac{b^2}{4} = 0, \quad b^2 = 4, \quad b = 2. \end{aligned}$$

2. Угол между векторами $\overrightarrow{DA}(0; -3; 0)$ и $\overrightarrow{DC}(a; -\frac{1}{2}; 0)$ равен 60° , значит,

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{DA}| &= \sqrt{0^2 + (-3)^2 + 0^2} = 3, \\ |\overrightarrow{DC}| &= \sqrt{a^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 0^2} = \sqrt{a^2 + \frac{1}{4}}, \\ \overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{DC} &= a \cdot 0 + \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot (-3) + 0 \cdot 0 = \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Согласно определению скалярного произведения векторов

$$\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{DC} = |\overrightarrow{DA}| \cdot |\overrightarrow{DC}| \cdot \cos \angle ADC,$$

поэтому

$$\begin{aligned} \frac{3}{2} &= 3 \cdot \sqrt{a^2 + \frac{1}{4}} \cdot \cos 60^\circ, \quad \frac{3}{2} = 3 \cdot \sqrt{a^2 + \frac{1}{4}} \cdot \frac{1}{2}, \quad \sqrt{a^2 + \frac{1}{4}} = 1, \\ a^2 + \frac{1}{4} &= 1, \quad a^2 = \frac{3}{4}, \quad a = \frac{\sqrt{3}}{2}. \end{aligned}$$

Уравнение плоскости (MKC) переписывается как:

$$\begin{aligned} \frac{5}{a}x + 2y + \frac{8}{b}z - 7 &= 0, \quad \frac{5}{\frac{\sqrt{3}}{2}}x + 2y + \frac{8}{2}z - 7 = 0, \\ \frac{10}{\sqrt{3}}x + 2y + 4z - 7 &= 0. \end{aligned}$$

4. Уравнение плоскости (ABC) : $z = 0$.

5. Угол α – угол между плоскостями (MKC) и (ABC) равен углу между нормальными векторами к ним, т.е. между $\vec{n}_1(\frac{10}{\sqrt{3}}; 2; 4)$ и $\vec{n}_2(0; 0; 1)$.

6. Найдём косинус угла между векторами \vec{n}_1 и \vec{n}_2 по формуле

$$\cos \alpha = \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|}.$$

Так как

$$\begin{aligned} \vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 &= \frac{10}{\sqrt{3}} \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 4 \cdot 1 = 4, \\ |\vec{n}_1| &= \sqrt{\left(\frac{10}{\sqrt{3}}\right)^2 + 2^2 + 4^2} = \sqrt{\frac{100}{3} + 4 + 16} = \\ &= \sqrt{\frac{100 + 12 + 48}{3}} = \sqrt{\frac{160}{3}} = \frac{4\sqrt{10}}{\sqrt{3}}, \\ |\vec{n}_2| &= \sqrt{0^2 + 0^2 + 1^2} = 1, \end{aligned}$$

то

$$\cos \alpha = \frac{4}{\frac{4\sqrt{10}}{\sqrt{3}} \cdot 1} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{10}}$$

7. Найдём тангенс угла α , используя тригонометрическую формулу

$$\operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} - 1, \quad \operatorname{tg} \alpha = \sqrt{\frac{1}{\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{10}}\right)^2} - 1} = \sqrt{\frac{10}{3} - 1} = \sqrt{\frac{7}{3}}$$

Ответ: б) $\sqrt{\frac{7}{3}}$.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта a и обоснованно получен верный ответ в пункте b	3
Получен обоснованный ответ в пункте b ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта a и при обоснованном решении пункта b получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта a , ИЛИ при обоснованном решении пункта b получен неверный ответ из-за арифметической ошибки ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте b с использованием утверждения пункта a , при этом пункт a не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	3

Задание 14.

Решите неравенство

$$\log_{0,5}(x^3 - 3x^2 - 9x + 27) \leq \log_{0,25}(x - 3)^4.$$

Решение.

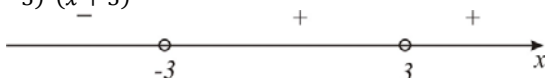
Найдём область допустимых значений неравенства:

$$\begin{cases} x^3 - 3x^2 - 9x + 27 > 0, & \begin{cases} x^2(x - 3) - 9(x - 3) > 0, \\ (x - 3)^4 > 0, & \begin{cases} x \neq 3, \\ x \neq 3. \end{cases} \end{cases} \\ \begin{cases} (x^2 - 9)(x - 3) > 0, \\ x \neq 3, \end{cases} & \begin{cases} (x - 3)^2(x + 3) > 0, \\ x \neq 3. \end{cases} \end{cases}$$

Решим неравенство методом интервалов:

$$\begin{aligned} (x - 3)^2(x + 3) &= 0, \\ (x - 3)^2 &= 0 \quad \text{или} \quad x + 3 = 0, \\ x &= 3 \quad \text{или} \quad x = -3. \end{aligned}$$

Отметим на числовой прямой полученные значения и расставим знаки выражения $(x - 3)^2(x + 3)$



Значит область допустимых значений исходного неравенства, $x \in (-3; 3) \cup (3; +\infty)$.
 Воспользуемся свойствами логарифма и запишем

$$\log_{0,5}((x-3)^2(x+3)) \leq \log_{0,5}((x-3)^2)^2,$$

$$\log_{0,5}((x-3)^2(x+3)) \leq \log_{0,5}(x-3)^2.$$

Основание логарифма меньше единицы, поэтому последнее неравенство равносильно соотношению

$$(x-3)^2(x+3) \geq (x-3)^2, \quad (x-3)^2(x+3) - (x-3)^2 \geq 0,$$

$$(x-3)^2(x+3-1) \geq 0, \quad (x-3)^2(x+2) \geq 0.$$

Найдём корни уравнения

$$(x-3)^2(x+2) = 0,$$

$$(x-3)^2 = 0 \quad \text{или} \quad x+2 = 0,$$

$$x = 3 \quad \text{или} \quad x = -2.$$

Отметим на числовой оси найденные корни и расставим знаки выражения $(x-3)^2(x+2)$



Следовательно, $x \in [-2; +\infty)$.

С учётом область допустимых значений получаем, что

$$\begin{cases} x \in (-3; 3) \cup (3; +\infty), \\ x \in [-2; +\infty). \end{cases}$$

Решением последней системы являются $x \in [-2; 3) \cup (3; +\infty)$

Ответ: $x \in [-2; 3) \cup (3; +\infty)$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен верный ответ, отличающийся от верного исключением точки -2 , ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	2

Задание 15.

В июле 2025 года планируется взять кредит на десять лет в размере 500 тыс. рублей. Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг будет возрастать на 30% по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга;
- в июле 2026, 2027, 2028, 2029 и 2030 годов должен быть на какую-то одну и ту же величину меньше долга на июль предыдущего года;
- в июле 2031, 2032, 2033, 2034 и 2035 годов должен быть на другую одну и ту же величину меньше долга на июль предыдущего года;
- к июлю 2035 года долг должен быть выплачен полностью.

Известно, что сумма всех платежей после полного погашения кредита будет равна 1250 тыс. рублей. Сколько рублей составит платёж в 2035 году?

Авторское решение.

Пусть долг в июле 2030 года составит B тыс. рублей.

По условию долг (в тыс. рублей) по состоянию на июль должен уменьшаться следующим образом:

$$500; 400 + 0,2B; 300 + 0,4B; 200 + 0,6B; 100 + 0,8B; \\ B; 0,8B; 0,6B; 0,4B; 0,2B; 0.$$

В январе каждого года долг возрастает на 30%, значит, последовательность размеров долга (в тыс. рублей) по состоянию на январь такова:

$$650; 520 + 0,26B; 390 + 0,52B; 260 + 0,78B; 130 + 1,04B; \\ 1,3B; 1,04B; 0,78B; 0,52B; 0,26B.$$

Следовательно, платежи (в тыс. рублей) должны быть следующими:

$$250 - 0,2B; 220 - 0,14B; 190 - 0,08B; 160 - 0,02B; \\ 130 + 0,04B; 0,5B; 0,44B; 0,38B; 0,32B; 0,26B.$$

Значит, сумма всех платежей (в тыс. рублей) будет составлять:

$$5(190 - 0,08B) + 5 \cdot 0,38B = 950 + 1,5B.$$

Получаем: $950 + 1,5B = 1250$, откуда $B = 200$. Платёж в 2035 году (последний) должен быть равен $0,26B$ тыс. рублей.

Следовательно, платёж в 2035 году составит 52 тыс. рублей.

Ответ: 52 тыс. рублей.

Решить данную задачу можно, если построить математическую модель в общем виде. Приведём этот способ решения.

Решение.

Пусть S тыс. рублей – сумма, взятая в кредит в июле 2025 года (по условию $S = 500$), $r\%$ – годовая ставка ко кредиту (по условию $r = 30$), k – коэффициент увеличения долга, $k = 1 + \frac{r}{100}$ ($k = 1,3$), X тыс. рублей – сумма, на которую должен уменьшаться долг в июле 2026, 2027, 2028, 2029 и 2030 годов, Y тыс. рублей – сумма, на которую должен уменьшаться долг в июле 2031, 2032, 2033, 2034 и 2035 годов, значит, $5X + 5Y = S$, $S_{\text{общ}}$ тыс. рублей – сумма всех платежей после полного погашения кредита (по условию $S_{\text{общ}} = 1250$). Составим таблицу по условию задачи:

Платежн ый год	Долг на начало платежного года	Долг на конец платежного года	Величина выплаты
1	$5X + 5Y$	$(5X + 5Y)k$	$(5X + 5Y)k - (4X + 5Y)$
2	$4X + 5Y$	$(4X + 5Y)k$	$(4X + 5Y)k - (3X + 5Y)$
3	$3X + 5Y$	$(3X + 5Y)k$	$(3X + 5Y)k - (2X + 5Y)$
4	$2X + 5Y$	$(2X + 5Y)k$	$(2X + 5Y)k - (X + 5Y)$
5	$X + 5Y$	$(X + 5Y)k$	$(X + 5Y)k - 5Y$
6	$5Y$	$5Yk$	$5Yk - 4Y$
7	$4Y$	$4Yk$	$4Yk - 3Y$
8	$3Y$	$3Yk$	$3Yk - 2Y$
9	$2Y$	$2Yk$	$2Yk - Y$
10	Y	Yk	Yk
11	0		

Общая сумма выплат составит

$$S_{\text{общ}} = ((5X + 5Y)k - (4X + 5Y)) + ((4X + 5Y)k - (3X + 5Y)) + \\ + ((3X + 5Y)k - (2X + 5Y)) + ((2X + 5Y)k - (X + 5Y)) + \\ + ((X + 5Y)k - 5Y) + (5Yk - 4Y) + (4Yk - 3Y) + (3Yk - 2Y) +$$

$$\begin{aligned}
 & +(2Yk - Y) + Yk = \\
 & = k(5X + 5Y + 4X + 5Y + 3X + 5Y + 2X + 5Y + X + 5Y + 5Y + \\
 & + 4Y + 3Y + 2Y + Y) - (4X + 5Y + 3X + 5Y + 2X + 5Y + X + 5Y + \\
 & + 5Y + 4Y + 3Y + 2Y + Y) = \\
 & = k(15X + 40Y) - (10X + 35Y).
 \end{aligned}$$

Составим систему уравнений

$$\begin{cases}
 5X + 5Y = S, \\
 k(15X + 40Y) - (10X + 35Y) = S_{\text{общ}}, \\
 5X = S - 5Y, \\
 \begin{cases}
 k(3(S - 5Y) + 40Y) - (2(S - 5Y) + 35Y) = S_{\text{общ}}, \\
 k(3S - 15Y + 40Y) - (2S - 10Y + 35Y) = S_{\text{общ}}, \\
 3k(S + 25Y) - (2S + 25Y) = S_{\text{общ}}, \\
 3kS + 25kY - 2S - 25Y = S_{\text{общ}}, \\
 25kY - 25Y = S_{\text{общ}} + 2S - 3kS, \\
 25Y(k - 1) = S_{\text{общ}} + 2S - 3kS, \\
 Y = \frac{S_{\text{общ}} + 2S - 3kS}{25(k - 1)}.
 \end{cases}
 \end{cases}$$

Подставим числовые данные в последнее выражение

$$\begin{aligned}
 Y & = \frac{1250 + 2 \cdot 500 - 3 \cdot 1,3 \cdot 500}{25 \cdot (1,3 - 1)} = \frac{1250 + 1000 - 3,9 \cdot 500}{25 \cdot 0,3} = \\
 & = \frac{50 \cdot (25 + 20 - 3,9 \cdot 10)}{2 \cdot (45 - 39)} = \\
 & = \frac{25 \cdot 0,3}{\frac{20 \cdot 6}{3}} = 40 \text{ (тыс. руб.)}.
 \end{aligned}$$

Платёж в 2035 году составит:

$$40 \cdot 1,3 = 52 \text{ (тыс. руб.)}.$$

Ответ: 52 тыс. рублей.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Верно построена математическая модель	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	2

Задание 16.

Прямая, перпендикулярная стороне BC ромба $ABCD$, пересекает его диагональ AC в точке M , а диагональ BD в точке N , причём $AM:MC = 1:2$, $BN:ND = 1:3$.

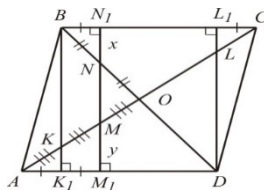
а) Докажите, что прямая MN делит сторону ромба BC в отношении 1:4.

б) Найдите сторону ромба, если $MN = \sqrt{6}$.

Авторское решение.

а) Пусть отрезки BK_1 , N_1M_1 , L_1D – высоты ромба, причём N_1M_1 проходит через точки M и N . Тогда $BN_1:N_1L_1 = BN:ND = 1:3$. Диагонали BD и AC пересекаются в точке O .

Пусть высоты BK_1 и L_1D пересекают диагональ AC в точке K и L соответственно. Поскольку $BN = NO$ и прямые BK и NM параллельны, получаем: $KM = MO = \frac{1}{6}AC$, а



значит, $AK = KM$. Таким образом, $AK_1 = K_1M_1 = BN_1$, но $AK_1 = L_1C$, поэтому $BN_1 = L_1C$.

Следовательно, $BN_1 : N_1C = BN_1 : (N_1L_1 + L_1C) = 1 : 4$.

б) Пусть $NN_1 = x$, $MM_1 = y$. Тогда $BK = 2NM = 2\sqrt{6}$, $KK_1 = \frac{1}{2}MM_1 = \frac{y}{2}$, $DL_1 = 4NN_1 = 4x$.

Поскольку $BK_1 = N_1M_1 = L_1D$, получаем:

$$2\sqrt{6} + \frac{y}{2} = x + \sqrt{6} + y = 4x.$$

откуда находим $x = \frac{3\sqrt{6}}{5}$, $y = \frac{4\sqrt{6}}{5}$, $DL_1 = \frac{12\sqrt{6}}{5}$.

В прямоугольном треугольнике ABK_1 имеем: $AK_1 = \frac{1}{5}AD = \frac{1}{5}AB$. По теореме Пифагора

$$BK_1 = \sqrt{AB^2 - AK_1^2} = \sqrt{AB^2 - \frac{1}{25}AB^2} = \frac{2\sqrt{6}}{5}AB = \frac{12\sqrt{6}}{5},$$

откуда $AB = 6$.

Ответ: б) 6.

Задачу можно решить иначе.

Решение.

а) 1. Пусть $AM = x$, а $BN = y$, тогда $MC = 2x$, $ND = 3y$, $AC = 3x$, $BD = 4y$.

2. $AC \cap BD = O$, значит, $AO = OC = \frac{3}{2}x$, $BO = OD = 2y$, $MO = \frac{x}{2}$, $NO = y$.

3. $MN \cap AD = Q$, $MN \cap BC = P$.

4. $\triangle BPN \sim \triangle DQN$ по острому углу, т.к. $\angle BPN = \angle DQN = 90^\circ$ по условию, $\angle BNP = \angle DNQ$ как вертикальные, значит

$$\frac{BP}{DQ} = \frac{BN}{ND}; \quad \frac{BP}{DQ} = \frac{y}{3y}; \quad DQ = 3BP.$$

5. $\triangle CPM \sim \triangle AQM$ по острому углу, т.к. $\angle CPM = \angle AQM = 90^\circ$ по условию, $\angle CMP = \angle AMQ$ как вертикальные, следовательно,

$$\frac{PC}{AQ} = \frac{CM}{AM}; \quad \frac{PC}{AQ} = \frac{2x}{x}; \quad AQ = \frac{1}{2}PC.$$

6. $BC = AD$, т.к. $ABCD$ – ромб, поэтому

$$BP + PC = \frac{1}{2}PC + 3BP; \quad \frac{1}{2}PC = 2BP; \quad PC = 4BP; \quad BP : PC = 1 : 4.$$

б) 1. $\triangle BPN \sim \triangle COB$ по острому углу, т.к. $\angle BPN = 90^\circ$ по условию, $\angle BOC = 90^\circ$ (BD и AC диагонали ромба, значит пересекаются под прямым углом).

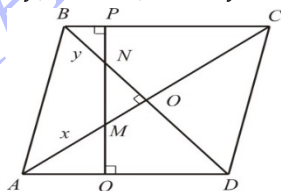
2. $\triangle BPN \sim \triangle NOM$ по острому углу, т.к. $\angle BPN = 90^\circ$ по условию, $\angle MON = 90^\circ$ (BD и AC диагонали ромба).

3. $\triangle BPN \sim \triangle COB$ и $\triangle BPN \sim \triangle NOM$, значит, $\triangle COB \sim \triangle NOM$, поэтому

$$\frac{CO}{NO} = \frac{OB}{OM} = \frac{CB}{NM}; \quad \frac{\frac{3}{2}x}{y} = \frac{2y}{\frac{x}{2}} = \frac{CB}{\frac{\sqrt{6}}{2}}; \quad \frac{\frac{3}{2}x}{y} = \frac{2y}{\frac{x}{2}};$$

$$\frac{3}{2}x \cdot \frac{x}{2} = 2y \cdot y; \quad \frac{3}{4}x^2 = 2y^2; \quad y^2 = \frac{3}{8}x^2; \quad y = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}x.$$

Подставим $y = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}x$ в равенство $\frac{2y}{x} = \frac{CB}{\sqrt{6}}$ и получим



$$\frac{4y}{x} = \frac{CB}{\sqrt{6}}; \quad CB = \frac{4y}{x} \cdot \sqrt{6};$$

$$CB = \frac{4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} x}{x} \cdot \sqrt{6} = \frac{4\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \cdot \sqrt{6} = 6.$$

Ответ: б) 6.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта <i>a</i> и обоснованно получен верный ответ в пункте <i>b</i>	3
Получен обоснованный ответ в пункте <i>b</i> ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта <i>a</i> и при обоснованном решении пункта <i>b</i> получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта <i>a</i> , ИЛИ при обоснованном решении пункта <i>b</i> получен неверный ответ из-за арифметической ошибки ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте <i>b</i> с использованием утверждения пункта <i>a</i> , при этом пункт <i>a</i> не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	3

Задание 17.

Найдите все значения *a*, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} (x^2 - 5x - y + 3) \cdot \sqrt{x - y + 3} = 0, \\ y = ax + a \end{cases}$$

имеет ровно два различных решения.

Авторское решение.

Каждое решение уравнения $(x^2 - 5x - y + 3)\sqrt{x - y + 3} = 0$ либо является решением уравнения $x - y + 3 = 0$, откуда $y = x + 3$, либо является решением системы:

$$\begin{cases} x^2 - 5x - y + 3 = 0, & \begin{cases} y = x^2 - 5x + 3, \\ x - y + 3 \geq 0; \end{cases} \\ y = x^2 - 5x + 3, & \begin{cases} y = x^2 - 5x + 3, \\ x^2 - 5x + 3 \leq x + 3; \end{cases} \end{cases}$$

откуда $y = x^2 - 5x + 3$ при условии $0 \leq x \leq 6$.

Для каждого из этих случаев подставим $y = ax + a$ и найдём количество корней получившегося уравнения в зависимости от *a*.

Первый случай: $ax + a = x + 3$, откуда при $a \neq 1$ получаем: $x = \frac{3-a}{a-1}$.

При $a = 1$ корней нет.

Второй случай: $ax + a = x^2 - 5x + 3$ при условии $0 \leq x \leq 6$. Получаем квадратное уравнение $x^2 - (a+5)x - a + 3 = 0$. Дискриминант этого уравнения равен $(a+5)^2 + 4(a-3) = a^2 + 14a + 13 = (a+1)(a+13)$. Значит, уравнение $x^2 - (a+5)x - a + 3 = 0$ имеет два корня при $a < -13$ и при $a > -1$, имеет единственный корень $x = \frac{a+5}{2}$ при $a = -13$ и при $a = -1$ и не имеет корней при $-13 < a < -1$. При $a < -13$ все коэффициенты уравнения $x^2 - (a+5)x - a + 3 = 0$ положительны, а значит, его корни

не удовлетворяют условию $0 \leq x \leq 6$. При $a = -13$ корень уравнения $x = -4$ не удовлетворяет условию $0 \leq x \leq 6$, при $a = -1$ корень уравнения $x = 2$ удовлетворяет условию $0 \leq x \leq 6$. При $a > -1$ функция $f(x) = x^2 - (a+5)x - a + 3$ принимает наименьшее значение при $x = \frac{a+5}{2}$, и это значение отрицательно. Следовательно, больший корень уравнения $f(x) = 0$ удовлетворяет условию $0 \leq x \leq 6$ тогда и только тогда, когда $\frac{a+5}{2} < 6$ и $f(6) \geq 0$; $9 - 7a \geq 0$, откуда $a \leq \frac{9}{7}$.

Меньший корень уравнения $f(x) = 0$ удовлетворяет условию $x \geq 0$ тогда и только тогда, когда $f(0) \geq 0$; $-a + 3 \geq 0$, откуда $a \leq 3$. В этом случае $\frac{a+5}{2} < 6$, а значит, этот корень удовлетворяет условию $x \leq 6$.

Число $\frac{3-a}{a-1}$ является корнем квадратного уравнения $f(x) = 0$ при $\left(\frac{3-a}{a-1}\right)^2 - (a+5)\left(\frac{3-a}{a-1}\right) - a + 3 = 0$, откуда

$$(a-3)^2 + (a+5)(a+3)(a-1) - (a-3)(a-1)^2 = 0;$$

$$(a-3)^2 + 6(a-3)(a-1) = 0; \quad (a-3)(7a-9) = 0,$$

то есть при $a = 3$ и при $a = \frac{9}{7}$.

Таким образом, исходная система уравнений имеет ровно два различных решения при $a = -1$; $a = 1$; $\frac{9}{7} \leq a < 3$.

Ответ: $a = -1$; $a = 1$; $\frac{9}{7} \leq a < 3$.

Задачу можно решить иначе. Приведём другое решение.

Решение.

Область допустимых значений исходной системы задается неравенством $x - y + 3 \geq 0$, которому соответствует полуплоскость, расположенная ниже прямой $y = x + 3$, проходящей через точки $(-3; 0)$ и $(0; 3)$.

Первое уравнение системы равносильно совокупности уравнений

$$\begin{cases} x^2 - 5x - y + 3 = 0, \\ \sqrt{x - y + 3} = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} y = x^2 - 5x + 3, \\ y = x + 3. \end{cases}$$

Графиком функции $y = x^2 - 5x + 3$ является парабола, ветви которой направлены вверх, вершина находится в точке $x_0 = -\frac{-5}{2}$, $x_0 = \frac{5}{2}$, $y_0 = \left(\frac{5}{2}\right)^2 - 5 \cdot \frac{5}{2} + 3$, $y_0 = \frac{25}{4} - \frac{25}{2} + 3$, $y_0 = \frac{25-50+12}{4}$, $y_0 = -\frac{13}{4}$, т.е. $\left(\frac{5}{2}; -\frac{13}{4}\right)$, и проходит через точки

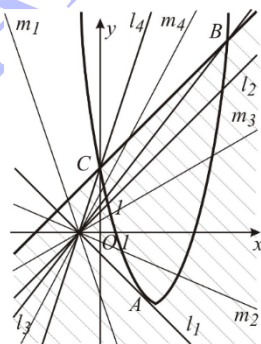
x	-1	0	1	2	3	4	5	6
y	9	3	-1	-3	-3	-1	3	9

Уравнение $y = ax + a$ задаёт пучок прямых, проходящих через точку $(-1; 0)$ и угловым коэффициентом a .

Проведём несколько прямых из этого пучка: l_1 – касающаяся параболы (проходит через точку A), l_2 – параллельно прямой $y = x + 3$, l_3 , l_4 – через точки пересечения параболы и прямой $y = x + 3$ (точки B и C , соответственно).

Число решений исходной системы зависит от положения прямой m : $y = x + 3$. Система имеет:

- одно решение, если прямая m расположена между прямыми l_4 и l_1 или совпадает с l_4 (на рисунке прямая m_1);
- два решения, если прямая m совпадает с прямой l_1 ;



- 3) три решения, если прямая m находится между прямыми l_1 и l_2 (на рисунке m_2);
 4) два решения, если прямая m совпадает с прямой l_2 ;
 5) три решения, если прямая m проходит между прямыми l_1 и l_2 (на рисунке m_3);
 6) два решения, если прямая m расположена между прямыми l_3 и l_4 или совпадает с l_3 (на рисунке прямая m_4).

Найдём значения a , при которых система уравнений имеет ровно два различных решения.

а) График функции $y = ax + a$ совпадёт с прямой l_1 , т.е. прямая m пойдёт через точку A , расположенную в четвёртой четверти, если система

$$\begin{cases} y = x^2 - 5x + 3, \\ y = ax + a \end{cases}$$

или уравнение

$$x^2 - 5x + 3 = ax + a, \quad x^2 - 5x - ax + 3 - a = 0, \\ x^2 - (a + 5)x + 3 - a = 0$$

имеет единственное решение. В таком случае дискриминант последнего уравнения

$$D = (a + 5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (3 - a) = a^2 + 10a + 25 - 12 + 4a = \\ = a^2 + 14a + 13$$

должен быть равен нулю: $a^2 + 14a + 13 = 0$.

По теореме Виета для последнего уравнения:

$$\begin{cases} a_1 + a_2 = -14, \\ a_1 \cdot a_2 = 13, \end{cases}$$

значит, $a_1 = -13$ и $a_2 = -1$.

При $a = -13$ уравнение $x^2 - (a + 5)x + 3 - a = 0$ переписывается как $x^2 + 8x + 16 = 0$ и имеет единственный корень $x = -4$.

При $a = -1$ квадратное уравнение $x^2 - (a + 5)x + 3 - a = 0$ примет вид $x^2 - 4x + 4 = 0$, корнем которого является $x = 2$.

Точка A имеет положительную абсциссу, поэтому исходная система будет иметь два решения при $x = 2$.

б) Прямая $y = ax + a$ совпадает с прямой l_2 , если $a = 1$, т.к. прямая l_2 параллельна прямой $y = x + 3$.

в) Точки B и C — это точки пересечения параболы $y = x^2 - 5x + 3$ и прямой $y = x + 3$. Составим и решим систему уравнений

$$\begin{cases} y = x^2 - 5x + 3, \\ y = x + 3, \end{cases} \\ x^2 - 5x + 3 = x + 3, \quad x^2 - 6x = 0, \quad x(x - 6) = 0,$$

следовательно,

$$\begin{cases} x = 0, \\ y = 3 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x = 6, \\ y = 9, \end{cases}$$

т.е. точки $B(6; 9)$ и $C(0; 3)$.

Прямая $y = ax + a$ совпадает с прямой l_3 , если проходит через точку B : $9 = a \cdot 6 + a$, $7a = 9$, $a = \frac{9}{7}$; с прямой l_4 , если проходит через точку C : $3 = a \cdot 0 + a$, $a = 3$.

Итак, исходная система имеет ровно два различных решения при $a = -1$, или $a = 1$, или $\frac{9}{7} \leq a < 3$.

Ответ: $a = -1$, $a = 1$, $\frac{9}{7} \leq a < 3$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получено множество значений a , отличающиеся	3

Содержание критерия	Баллы
от искомого только исключением / включением точки $a = \frac{9}{7}$ и / или $a = 3$	
С помощью верного рассуждения получен промежуток $(\frac{9}{7}; 3)$ множества значений a , возможно, с включением граничных точек ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом верно выполнены все шаги решения	2
Задача сведена к исследованию взаимного расположения параболы и прямых (аналитически или графически)	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	4

Задание 19.

Из пары натуральных чисел $(a; b)$, где $a > b$, за один ход получают пару $(a + b; a - b)$.

а) Можно ли за несколько таких ходов получить из пары $(100; 1)$ пару большее число в которой равно 400?

б) Можно ли за несколько таких ходов получить из пары $(100; 1)$ пару $(806; 788)$?

в) Какое наименьшее a может быть в паре $(a; b)$, из которой за несколько ходов можно получить пару $(806; 788)$?

Авторское решение.

а) Из пары $(100; 1)$ за один ход получается пара $(101; 99)$, за два хода получается пара $(200; 2)$, за три хода получается пара $(202; 198)$, а за четыре хода получается пара $(400; 4)$.

б) Заметим, что за один ход из пары $(a; b)$ получается пара $(a + b; a - b)$, а за два хода получается пара $(2a; 2b)$. Следовательно, из пары $(100; 1)$ можно получить только пары $(2^k \cdot 100; 2^k)$ и $(2^k \cdot 101; 2^k \cdot 99)$, где k – неотрицательное целое число. Число 806 не равно $2^k \cdot 100$ и $2^k \cdot 101$, а значит, пару $(806; 788)$ невозможно получить за несколько ходов из пары $(100; 1)$.

в) Заметим, что пару $(c; d)$ за один ход можно получить только из пары $(\frac{c+d}{2}; \frac{c-d}{2})$ при условии, что числа c и d одной чётности.

Таким образом, пара $(806; 788)$ получается из пары $(797; 9)$, которая получается из пары $(403; 394)$. Пару $(403; 394)$ невозможно получить за один ход ни из какой пары, поскольку числа 403 и 394 имеют разную чётность. Следовательно, наименьшее число a в паре $(a; b)$, из которой за несколько ходов можно получить пару $(806; 788)$, равно 403.

Ответ: а) да; б) нет; в) 403.

Задачу можно решить другим способом.

Решение.

Рассмотрим пару чисел $(a_n; b_n)$, являющихся членами последовательностей $a_n = a_{n-1} + b_{n-1}$ и $b_n = a_{n-1} - b_{n-1}$, где a_1 и b_1 – натуральные, причём $a_1 > b_1$.

а) Если $a_1 = 100$, а $b_1 = 1$, то

$$a_2 = 101, \quad b_2 = 99;$$

$$a_3 = 200, \quad b_3 = 2;$$

$$a_4 = 202, \quad b_4 = 198;$$

$$a_5 = 400, \quad b_5 = 4.$$

Итак, за несколько ходов из пары $(100; 1)$ можно получить пару большее число в которой равно 400.

б) Согласно определению $a_n = a_{n-1} + b_{n-1}$, где a_1 и b_1 – натуральные, причём $a_1 > b_1$, значит, последовательность a_n является возрастающей. Если $a_1 = 100$ и $b_1 = 1$, то

$$\begin{aligned} a_2 &= 101, & b_2 &= 99; \\ a_3 &= 200, & b_3 &= 2; \\ a_4 &= 202, & b_4 &= 198; \\ a_5 &= 400, & b_5 &= 4; \\ a_6 &= 404, & b_6 &= 396; \\ a_7 &= 800, & b_7 &= 8; \\ a_8 &= 808, & b_8 &= 792. \end{aligned}$$

Число $a_7 < 806 < a_8$, следовательно, нельзя за несколько ходов из пары (100; 1) поучить пару (806; 788).

в) Если $a_n = 806$, $b_n = 788$, то можно составить систему из двух уравнений

$$\begin{cases} a_{n-1} + b_{n-1} = 806, \\ a_{n-1} - b_{n-1} = 788. \end{cases}$$

Решим эту систему методом сложения

$$\begin{cases} 2a_{n-1} = 1594, & \begin{cases} a_{n-1} = 797, \\ b_{n-1} = 9. \end{cases} \\ 2b_{n-1} = 18, \end{cases}$$

Вновь составим систему уравнений

$$\begin{cases} a_{n-2} + b_{n-2} = 797, \\ a_{n-2} - b_{n-2} = 9. \end{cases}$$

Решая данную систему, получаем

$$\begin{cases} 2a_{n-2} = 806, & \begin{cases} a_{n-2} = 403, \\ b_{n-2} = 394. \end{cases} \\ 2b_{n-2} = 788, \end{cases}$$

Для последней пары значений (a_{n-2} ; b_{n-2}) составим систему уравнений

$$\begin{cases} a_{n-3} + b_{n-3} = 403, \\ a_{n-3} - b_{n-3} = 394. \end{cases}$$

Используя метод сложения, имеем

$$\begin{cases} 2a_{n-3} = 403, & \begin{cases} a_{n-3} = 201,5, \\ b_{n-3} = 197. \end{cases} \\ 2b_{n-3} = 394, \end{cases}$$

Число 201,5 не является натуральным, значит, наименьшее a , которое может быть в паре (a ; b), из которой за несколько ходов можно получить пару (806; 788) – это 403.

Ответ: а) да; б) нет; в) 403.

Содержание критерия	Баллы
Обосновано получены верные ответы в пунктах a , b и v	4
Обосновано получен верный ответ в пункте v и обосновано получен верный ответ в пункте a или b	3
Обосновано получены верные ответы в пунктах a и b ИЛИ обосновано получен верный ответ в пункте v	2
Обосновано получен верный ответ в пункте a или b	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	4

2.5. Рекомендации по совершенствованию организации и методики преподавания предмета на основе выявленных типичных затруднений и ошибок ЕГЭ по математике (профильный уровень)

- Учителям, методическим объединениям учителей.

Результаты экзамена по математике на профильном уровне позволили выявить ряд проблем, которые необходимо учитывать при обучении математике и подготовке обучающихся к государственной итоговой аттестации в формате ЕГЭ.

Важным условием успешной подготовки к экзамену является тщательность в отслеживании результатов учеников по всем темам и в своевременной коррекции уровня усвоения учебного материала.

Низкий процент выполнения геометрических заданий по планиметрии свидетельствует о сохраняющихся системных недостатках в преподавании геометрии в основной школе.

Недостаточное формирование вычислительных навыков учащихся при выполнении задания 15 (практико-ориентированная задача экономического содержания), а также некорректное использование данных задачи при составлении математической модели.

Неполное выполнение всех преобразований, необходимых при решении заданий высокого уровня сложности 17 – 18. Недостаточный уровень математической культуры при решении задач, требующих доказательства или обоснования доказываемого утверждения или факта.

Анализируя результаты, полученные выпускниками за решение задач 17 и 18 (профильный уровень) за последние три года следует отметить, что процент выполнения заданий высокого уровня сложности, предполагающих свободное владение материалом курса математики, находится в регионе на низком уровне. Низкий процент выполнения подобных заданий свидетельствует о сохраняющихся системных недостатках в преподавании математики как в основной школе, так и в старшей школе. Как правило, причиной является рассмотрение лишь тех типов задач, которые встречались на экзамене в предыдущие годы, вместо полноценного изучения методов решения заданий с параметром и ознакомления с методами решения олимпиадных задач.

На основании вышеизложенного, **рекомендуем** педагогам проанализировать результаты государственной итоговой аттестации по математике на заседаниях городских (районных) методических объединений учителей математики; планировать работу на 2023-2024 учебный год с учетом:

- изучения нормативных документов Министерства Просвещения РФ, методических писем и методических рекомендаций ФИПИ <http://www.fipi.ru/>, где содержатся нормативные требования к проведению ЕГЭ, характеристика контрольных измерительных материалов по математике, рекомендации по использованию и интерпретации результатов выполнения экзаменационных работ и т. п. Ознакомление обучающихся с демоверсиями ЕГЭ 2024 г. (акцент на повторение /изучение материала, освоение навыков);

- использования ресурса «Открытый банк заданий ЕГЭ. Математика», созданного авторским коллективом ФИПИ с целью подготовки учащихся к итоговой аттестации <http://www.fipi.ru/>;

- ознакомления с видео-консультациями Рособнадзора и с ресурсом «Навигатор подготовки к ОГЭ, ЕГЭ» (fipi.ru/navigator-podgotovki/);

- использования банка заданий по формированию математической грамотности ИСРО РАО <http://skiv.instrao.ru/bank-zadaniy/matematiceskaya-gramotnost/>;

- выявления проблемных тем теоретического материала по математике за курс основной и старшей школы: числа и выражения, уравнение и неравенства, планиметрия и стереометрия, функция, текстовые задачи, вероятность и статистика. Организация индивидуальных и групповых занятий по восполнению пробелов в знаниях отдельных теоретических вопросов курса математики;

- на занятиях спецкурсов, факультативов продолжить отработку навыков практического применения теории по содержательным блокам курса математики,

например, «Числа и выражения», «Уравнения и неравенства», «Практико-ориентированные задачи», «Геометрия: планиметрия и стереометрия»;

- на уроках повторения пройденного материала уделить особое внимание вопросам и заданиям, вызвавшим затруднения у школьников: тригонометрические уравнения, логарифмические неравенства, задачи с экономическим содержанием, задачи с параметром, задачи по теории чисел. Проведения анализа условия задачи, искать пути решения, применять известные алгоритмы в измененной ситуации (стандартные методы решения простейших уравнений и неравенств, преобразование алгебраических выражений, свойства геометрических фигур при решении планиметрических и стереометрических задач);

- закрепления навыков смыслового чтения и анализа текста заданий (задания типа 3, 4, 8, 9, 15, 18), т.к. у обучающихся недостаточно сформированы как читательская грамотность, так и умения использовать приобретённые знания в практической деятельности и повседневной жизни. В каждой теме при изучении математики в старшей школе в соответствии с кодификатором содержания выполнять задания, построенные на реальных жизненных ситуациях. Акцент – на обсуждение: обсуждение ситуации, выявление математических аспектов, всех данных, переформулирование и моделирование объектов, перевод на язык математики, обсуждение ограничений, допущений, различные способы решения, обсуждение их рациональности; обсуждение результатов: оценка и интерпретация, соотнесение с ситуацией;

- регулярное включение в ход урока заданий на «изменение и зависимости», «пространство и форма», «неопределенность», «количественные рассуждения». Предъявление обучающимся и выполнение ими контекстных заданий, разработанных на основе проблемных ситуаций, является, важным видом познавательной и практической деятельности, в ходе которой развивается функциональная грамотность, в том числе и математическая. Эта деятельность требует, во-первых, применения осваиваемых школьниками знаний, умений и опыта, а во-вторых, переноса осваиваемых в рамках учебного предмета «Математика» знаний и умений на более широкую познавательную и практическую область, расширяющуюся по мере обучения школьников;

- усиления внимания к геометрическим задачам на решение и доказательство; необходимо обратить большое внимание на изучение геометрии – непосредственно с 7 класса, когда начинается систематическое изучение этого предмета. Подготовку выпускников следует начинать не с рассмотрения примеров решения геометрических задач вариантов ЕГЭ, а с изучения свойств геометрических фигур и их элементов. Задачи необходимо решать по темам, например, «Треугольник и его элементы», «Пирамида: понятие, свойства, формулы» и т.д. Таким образом, следует рекомендовать при подготовке к экзамену особое внимание уделить формированию и развитию умений выполнять действия с геометрическими фигурами, предлагать задания с разными числовыми данными по одному рисунку, предлагать задания, где необходимо определять различные элементы фигуры и/или вычислить их числовые характеристики, уделять больше внимания развитию умения верно пользоваться геометрическим чертежом, добиваться достаточного уровня владением теоретическим материалом;

- усиления работы по повышению уровня вычислительных навыков учащихся (например, с помощью устной работы на уроках: применение арифметических законов действий при работе с рациональными числами, свойства степеней, корней и др.), что позволит им успешно выполнить задания, избежав досадных ошибок, применяя рациональные методы вычислений;

- повышения мотивации учащихся к самостоятельному изучению дополнительного материала, без которого трудно решить задания повышенного и высокого уровня сложности;

- отработки у обучающихся быстрого и правильного выполнения заданий Части 1; постоянно контролировать умения, необходимые для выполнения заданий базового уровня. В целях эффективного использования времени на экзамене нужно учить школьников приемам быстрого и рационального счета. А также формированию не только функциональной математической грамотности, но и читательской грамотности при работе с текстом как основной составляющей функциональной грамотности обучающихся: работа с рисунками, схемами, графиками, текстом, применении знаний на практике. Уделять внимание обучению работы с вопросами, вычлениению ключевых теорий, на базе которых строятся ответы:

- организации дифференцированного подхода с наиболее подготовленными учащимися для успешного выполнения заданий Части 2. Это относится и к работе на уроке, и к дифференциации домашних заданий и заданий, предлагающихся обучающимся на контрольных, проверочных, диагностических работах;

- в современных условиях развития цифровой образовательной среды рекомендуем использование возможности сетевого взаимодействия с обучающимися, организацию изучения тем и итоговое повторение на основе интерактивных уроков, применяя образовательные платформы (например, <https://эдо.образование33.рф> и др.).

На все это нужно обращать особое внимание, выявляя «группы риска» обучающихся, с целью организации эффективной подготовки таких учащихся к государственной итоговой аттестации.

- *Муниципальным органам управления образования:*

- провести диагностику факторов, влияющих на качество образования в общеобразовательных организациях;

- продолжить работу муниципальных ресурсных центров по подготовке к государственной итоговой аттестации по математике и другим предметам;

- усиление контроля за осуществлением подготовки учащихся к государственной итоговой аттестации в форме ЕГЭ.

- *Прочие рекомендации:*

- проведение учителями диагностических работ в формате ЕГЭ и учет их результатов по ликвидации пробелов в знаниях обучающихся, размещенных на сайте СтатГрад <https://statgrad.org/>;

- посещение учениками факультативных занятий, элективных курсов, курсов по выбору;

- обеспечение формирования функциональной математической грамотности школьников как необходимого условия для выполнения заданий ЕГЭ по математике на профильном уровне.

Рекомендации по организации дифференцированного обучения школьников с разными уровнями предметной подготовки

- *Учителям, методическим объединениям учителей:*

Отбор учебного материала для повторения и закрепления изученного учебного материала необходимо осуществлять с учетом уровня подготовки обучающихся, уделяя наибольшее внимание традиционно сложным для усвоения темам. При этом целесообразно применять дифференцированный подход, при котором следует разделить обучающихся на группы:

- мотивированным обучающимся, полноценно усвоившим учебный материал, предлагать дополнительные вопросы, расширяющие содержание ранее изученного материала, тренировочные варианты для выполнения, проводить консультации по возникающим вопросам;

- обучающимся, допускающим индивидуальные ошибки при выполнении заданий КИМ, работать над повторением и закреплением теории трудных тем, обработкой групп заданий из Открытого банка (Методические рекомендации для обучающихся по организации индивидуальной подготовки к ЕГЭ по учебному предмету, представленных на официальном сайте ФИПИ <http://www.fipi.ru/>);

- обучающимся с низким уровнем мотивации, испытывавшим затруднения при усвоении ранее изученных тем, предлагать задания на повторение и закрепление ранее изученного материала, отработать задания до автоматизма из «Открытого банка заданий ЕГЭ. Математика» (необходимо определить количество и тип заданий, выполнение которых обеспечит преодоление минимального порога).

По организации дифференцированного обучения школьников с разными уровнями предметной подготовки необходимо сделать акцент на индивидуальные особенности учащихся и включить в методическую работу поэтапное дифференцированное обучение:

- диагностический этап: первичная диагностика, которая позволит определить имеющийся уровень сформированности знаний, умений, навыков по предмету, а также сформированность предметных и метапредметных УУД обучающихся;

- содержательно-методический: выстраивание индивидуальной траектории по подготовке к ГИА, исходя из уровня подготовки обучающихся. Разработка теоретических и практических занятий, направленных на совершенствование и повышение уровня; разработка самооценочных диагностических инструментов, которые позволяют учащимся самостоятельно выстраивать свой образовательный маршрут, что предполагает организацию педагогического взаимодействия учитель-ученик (группа учеников);

- рефлексивный: обеспечение промежуточного контроля уровня готовности учащихся к сдаче экзамена по математике и корректировка индивидуального образовательного маршрута.

Одним из условий, влияющим на успешную подготовку к ЕГЭ по математике на профильном уровне, является реализация индивидуального подхода в работе с учеником, планирующим сдавать экзамен. Для этого может быть использован график, который отражает порядок прохождения тем и результатов усвоения изученного материала, в том числе и выполнения заданий. Важнейшим фактором, определяющим успешную сдачу экзамена, является также формирование метапредметных результатов обучения, а также формирования умения мыслить нестандартно при выполнении заданий. Для реализации индивидуального подхода возможно применение и цифровых образовательных технологий.

○ *Администрациям образовательных организаций:*

- увеличения количества часов на изучение математики из части учебного плана, самостоятельно формируемой участниками образовательных отношений и (или) предусмотреть включение в учебный план общеобразовательной организации элективных курсов, направленных на подготовку обучающихся к сдаче государственной итоговой аттестации в 10-11 классах;

- обеспечение организации подготовки к государственной итоговой аттестации в форме ЕГЭ по математике в течение двух лет (10 — 11 класс) с учетом дифференцированного подхода (деления учащихся по уровню подготовки), которая включает в себя формирование элективных, факультативных курсов по повторению основных разделов математики (числа и вычисления, уравнения и неравенства, функция, геометрия, вероятность и статистика), так же целесообразно организовать факультатив по решению заданий повышенного и высоко уровня сложности по геометрии, задач с параметром и задач с экономическим содержанием; проведение индивидуальных консультаций и диагностических и тренировочных работ в течение года;

- включение в план внутришкольного контроля подготовку к ЕГЭ по математике учащихся разного уровня, посещение уроков с целью проверки реализации системно-деятельностного подхода, формирования функциональной грамотности, включение в разные этапы урока элементов подготовки к ЕГЭ; осуществление дифференцированного подхода к организации подготовки к ЕГЭ;

- регулярное информирование родителей учащихся об успехах и проблемах обучающихся при подготовке к государственной итоговой аттестации в форме ЕГЭ: организация и проведение родительских собраний с целью информирования законных представителей школьников о важности и процедуре проведения государственной итоговой аттестации в форме ЕГЭ, проведение анкетирования для обучающихся по выбору сдачи математики на базовом или профильном уровне.

○ *Муниципальным органам управления образования:*

- организация контроля за деятельностью образовательных организаций по подготовке обучающихся к итоговой аттестации;

- обеспечение проведения централизованных диагностических работ для отслеживания уровня подготовки учащихся к ЕГЭ по математике.

○ *Прочие рекомендации:*

- на уровне школы необходимо выстроить дифференцированную модель для подготовки учащихся к ЕГЭ по математике, в рамках которой будет сконструирован диагностический, содержательный и рефлексивно-оценочный этап.

Рекомендации по темам для обсуждения /обмена опытом на методических объединениях учителей-предметников

- Результаты ЕГЭ по математике на профильном уровне в 2023 году.

- Анализ типичных ошибок заданий с кратким ответом базового, по-вышенного уровней сложности.

- Анализ типичных ошибок заданий с развернутым решением (задания Части 2).

- Демовариант КИМ по математике на профильном уровне в 2024 г.

- Особенности оценивания заданий с развернутым ответом КИМ ЕГЭ по математике в 2024 г.

- Методы и приемы решения математических задач повышенной и высокой сложности: с экономическим содержанием, с параметром, задачи олимпиадного характера.

- Методы и приемы решения геометрических задач: планиметрических и стереометрических.

- Использование ЦОС в образовательной практике учителей математики.

- Формирование функциональной грамотности школьников, в том числе читательской и математической.

**ЧАСТЬ III. ИТОГИ ОГЭ ПО МАТЕМАТИКЕ
ВО ВЛАДИМИРСКОЙ ОБЛАСТИ В 2023 ГОДУ.**

3.1. Основные результаты ОГЭ по математике

Количество участников ОГЭ по математике (за последние годы проведения ОГЭ по предмету) по категориям¹¹

Таблица 3-1

№ п/п	Участники ОГЭ	2022 г.		2023 г.	
		чел.	%	чел.	%
1.	Обучающиеся СОШ	10329	82,37	11192	82,92
2.	Обучающиеся ООШ	1140	9,09	1195	8,85
3.	Обучающиеся лицеев	266	2,12	273	2,02
4.	Обучающиеся гимназий	722	5,76	724	5,36
5.	Обучающиеся интернатов	47	0,37	51	0,38
6.	Выпускники ОСОШ	36	0,29	62	0,46
7.	Участники с ограниченными возможностями здоровья	42	0,33	50	0,37

ВЫВОД о характере изменения количества участников ОГЭ по математике (отмечается динамика количества участников ОГЭ по предмету в целом, по отдельным категориям, видам образовательных организаций)

Следует отметить динамику роста количества участников ОГЭ по математике за последний год. Так, в 2023 году экзамен по математике сдавало на 961 человека больше по сравнению с 2022 годом.

Выпускников текущего года, обучающихся по программам основного общего образования в средней общеобразовательной школе, больше, чем выпускников других типов ОО. Их процент от общего числа участников составляет 82,92%. Доля выпускников гимназий и лицеев составляет 7,38%, что на 0,5% меньше, чем в 2022 году.

Значительно выросло число участников ОГЭ, обучающихся на дому: с 37 чел. в 2022 году до 47 – в 2023.

Количество участников ОГЭ с ограниченными возможностями здоровья увеличилось на 8 человек относительно 2022 года.

Самое большое количество участников ОГЭ по математике в г. Владимир (3413 чел.), Ковров (1277 чел.), Муром (1018 чел.), Александровском районе (1113 чел.). Это можно объяснить тем, что данные АТЕ являются самыми крупными во Владимирской области.

Диаграмма распределения первичных баллов участников ОГЭ по математике в 2023 г.

(количество участников, получивших тот или иной балл)

¹¹ Перечень категорий ОО может быть уточнен / дополнен с учетом специфики региональной системы образования



Динамика результатов ОГЭ по математике

Таблица 3-2

Получили отметку	2022 г.		2023 г.	
	чел.	%	чел.	%
«2»	619	4,94	546	4,05
«3»	7671	61,17	7036	52,13
«4»	3801	30,31	5026	37,24
«5»	449	3,58	889	6,59

Результаты ОГЭ по МСУ региона

Таблица 3-3

№ п/п	МСУ	Всего участников	«2»		«3»		«4»		«5»	
			чел.	%	чел.	%	чел.	%	чел.	%
1.	г.Владимир	3397	224	6,59	1446	42,57	1395	41,07	332	9,77
2	г.Гусь-Хрустальный	692	10	1,45	391	56,5	241	34,83	50	7,23
3	г.Ковров	1265	5	0,4	675	53,36	477	37,71	108	8,54
4	о.Муром	1001	38	3,8	440	43,96	452	45,15	71	7,09
5	г.Радужный	154	6	3,9	60	38,96	75	48,7	13	8,44
6	Александровский район	1113	4	0,36	693	62,26	374	33,6	42	3,77
7	Вязниковский район	712	40	5,62	415	58,29	224	31,46	33	4,63
8	Гороховецкий район	218	19	8,72	129	59,17	60	27,52	10	4,59
9	Гусь-Хрустальный район	398	19	4,77	263	66,08	102	25,63	14	3,52
10	Камешковский район	289	16	5,54	189	65,4	79	27,34	5	1,73
11	Киржачский район	418	32	7,66	267	63,88	102	24,4	17	4,07

№ п/п	МСУ	Всего участников	«2»		«3»		«4»		«5»	
			чел.	%	чел.	%	чел.	%	чел.	%
12	Ковровский район	235	8	3,4	164	69,79	56	23,83	7	2,98
13	Кольчугинский район	486	8	1,65	260	53,5	183	37,65	35	7,2
14	Меленковский район	318	9	2,83	166	52,2	138	43,4	5	1,57
15	Муромский район	106	0	0	64	60,38	38	35,85	4	3,77
16	Петушинский район	673	43	6,39	315	46,81	280	41,6	35	5,2
17	Селивановский район	159	0	0	66	41,51	80	50,31	13	8,18
18	Собинский район	605	29	4,79	362	59,83	193	31,9	21	3,47
19	Судогодский район	374	4	1,07	172	45,99	179	47,86	19	5,08
20	Суздальский район	437	26	5,95	225	51,49	168	38,44	18	4,12
21	Юрьев-польский район	287	3	1,05	210	73,17	63	21,95	11	3,83
22	МОиМП	160	3	1,88	64	40	67	41,88	26	16,25

Результаты по группам участников экзамена с различным уровнем подготовки с учетом типа ОО¹²

Таблица 3-4

№ п/п	Участники ОГЭ	Доля участников, получивших отметку					
		«2»	«3»	«4»	«5»	«4» и «5» (качество обучения)	«3», «4» и «5» (уровень обученности)
1	Обучающиеся СОШ	3,65	52,35	37,82	6,18	44	96,35
2	Обучающиеся ООШ	4,77	65,02	27,62	2,59	30,21	95,23
3	Обучающиеся лицеев	5,13	46,52	38,83	9,52	48,35	94,87
4	Обучающиеся гимназий	1,8	33,15	45,99	19,06	65,06	98,2
5	Обучающиеся интернатов	0	50,98	45,1	3,92	49,02	100
6	Обучающиеся СОШ	87,1	11,29	1,61	0	1,61	12,9

Выделение перечня ОО, продемонстрировавших наиболее высокие результаты ОГЭ по математике¹³

Выбирается от 5 до 15% от общего числа ОО в субъекте Российской Федерации, в которых:

¹²Указывается доля обучающихся от общего числа участников по предмету.

¹³Рекомендуется проводить анализ в случае, если количество участников в этом ОО достаточное для получения статистически достоверных результатов для сравнения.

- доля участников ОГЭ, **получивших отметки «4» и «5»**, имеет **максимальные значения** (по сравнению с другими ОО субъекта Российской Федерации);
- доля участников ОГЭ, **получивших неудовлетворительную отметку**, имеет **минимальные значения** (по сравнению с другими ОО субъекта Российской Федерации).

Таблица 3-5

№ п/п	Название ОО	Доля участников, получивших отметку «2»	Доля участников, получивших отметки «4» и «5» (качество обучения)	Доля участников, получивших отметки «3», «4» и «5» (уровень обученности)
1.	(3) МАОУ «Гимназия №3» г. Владимира	0	88,37	100
2	(410) ЧОУ «Православная гимназия г. Коврова»	0	83,33	100
3	(97) ЧОУ «Муромская православная гимназия»	0	82,35	100
4	(84) МБОУ «Гимназия № 6» о. Муром	0	80	100
5	(30) МАОУ «Гимназия 35» г. Владимира	0	78,75	100
6	(279) МБОУ СОШ №1 г.Петушки	0	77,03	100
7	(93) МБОУ СОШ № 20 о. Муром	0	76,92	100
8	(411) ОАНО «Школа и детский сад МИР»	0	76,47	100
9	(350) МБОУ «Боголюбовская СОШ имени чемпионки мира по шахматам Е.И. Быковой» Суздальского района	0	73,91	100
10	(330) МБОУ «Андреевская СОШ» Судогодского района	0	73,47	100
11	(9) МБОУ СОШ № 10 г. Владимира	0	73,13	100
12	(20) МАОУ «Гимназия 23» г. Владимира	0	70,53	100
13	(68) МБОУ СОШ № 14 г. Коврова	0	69,64	100
14	(240) МБОУ «Средняя школа № 2» Кольчугинского района	0	66,67	100
15	(339) МБОУ «Судогодская СОШ №2» Судогодского района	0	65,08	100
16	(304) МБОУ «Красногорбатская СОШ» Селивановского района	0	63,73	100
17	(282) МБОУ «Гимназия №17» г. Петушки	0	63,64	100
18	(489) ГКОУ ВО «Санаторная школа-интернат г.Вязники для детей,	0	63,64	100

№ п/п	Название ОО	Доля участников, получивших отметку «2»	Доля участников, получивших отметки «4» и «5» (качество обучения)	Доля участников, получивших отметки «3», «4» и «5» (уровень обученности)
	нуждающихся в длительном лечении»			
19	(60) МБОУ Гимназия №1 г. Коврова	0	62,5	100
20	(264) МБОУ «Ляховская СОШ» Меленковского района	0	61,9	100
21	(81) МБОУ СОШ № 2 о. Муром	0	60	100
22	(19) МБОУ «СОШ № 22» г. Владимира	0	60	100
23	(64) МБОУ СОШ № 9 г. Коврова	0	58,93	100
24	(272) МБОУ «Молотицкая СОШ» Муромского района	0	58,82	100
25	(362) МБОУ «Ново-Александровская ООШ» Суздальского района	0	58,82	100
26	(29) МБОУ «СОШ № 34» г. Владимира	0	58,7	100
27	(256) МБОУ «СОШ №2» г. Меленки	0	58,62	100
28	(305) МБОУ «Мальшевская СОШ» Селивановского района	0	58,33	100
29	(288) МБОУ Аннинская СОШ Петушинского района	0	58,33	100
30	(316) МБОУ Зареченская СОШ имени Героя Советского Союза А.И. Отставнова Собинского района	0	58,33	100

Выделение перечня ОО, продемонстрировавших самые низкие результаты ОГЭ по математике⁵

Выбирается от 5 до 15% от общего числа ОО в субъекте Российской Федерации, в которых:

- доля участников ОГЭ, получивших отметку «2», имеет **максимальные значения** (по сравнению с другими ОО субъекта Российской Федерации);
- доля участников ОГЭ, получивших отметки «4» и «5», имеет **минимальные значения** (по сравнению с другими ОО субъекта Российской Федерации).

Таблица 3-6

№ п/п	Название ОО	Доля участников, получивших отметку «2»	Доля участников, получивших отметки «4» и «5» (качество обучения)	Доля участников, получивших отметки «3», «4» и «5» (уровень обученности)
1	(46) МАВСОУ ОСОШ №8 г. Владимира	87,1	1,61	12,9
2	(293) МБОУ ОРСОШ Петушинского района	58,33	8,33	41,67
3	(10) МБОУ «СОШ №11 им. М.Ф. Мануйловой» г. Владимира	32	22	68
4	(161) МБОУ Фоминская СОШ Гороховецкого района	30,77	15,38	69,23
5	(169) МБОУ «Демидовская СОШ» Гусь-Хрустального района	30,77	15,38	69,23
6	(352) МБОУ «Красногвардейская СОШ» Суздальского района	22,22	22,22	77,78
7	(407) Православная СОШ им.Арсения Элассонского. Суздаль	20	50	80
8	(289) МБОУ «Лицей им. ак. И.А.Бакулова» пос. Вольгинский Петушинского района	19,75	35,8	80,25
9	(185) МБОУ «Уршельская СОШ» Гусь-Хрустального района	18,92	8,11	81,08
10	(147) МБОУ «Сергеевская СОШ» Вязниковского района	18,75	31,25	81,25
11	(207) МОУ Давыдовская ООШ Камешковского района	18,18	9,09	81,82
12	(27) МБОУ «СОШ 32» г. Владимира	17,07	36,59	82,93
13	(151) МБОУ «Октябрьская школа № 1» Вязниковского района	16,67	11,11	83,33
14	(57) МБОУ «ООШ № 7» г. Гусь-Хрустальный	15,38	20,51	84,62
15	(379) МБОУ «Шихобаловская ОШ» Юрьев-Польского района	15,38	23,08	84,62
16	(159) МБОУ СОШ №1Гороховецкого района	14,52	35,48	85,48
17	(320) МБОУ ООШ №2 г.Собинки	14	20	86
18	(211) МБОУ СОШ №1 им. М.В.Серёгина Киржачского района	13,79	3,45	86,21
19	(349) МБОУ «СОШ №2 г. Суздаля»	13,7	41,1	86,3

№ п/п	Название ОО	Доля участников, получивших отметку «2»	Доля участников, получивших отметки «4» и «5» (качество обучения)	Доля участников, получивших отметки «3», «4» и «5» (уровень обученности)
20	(98) МБОУ ООШ №12 о. Муром	13,24	30,88	86,76
21	(310) МБОУ СОШ № 1 г. Собинка	12,94	30,59	87,06
22	(135) МБОУ «СОШ № 9» Вязниковского района	12,59	34,27	87,41
23	(174) МБОУ «Колпская СОШ» Гусь-Хрустального района	12,5	31,25	87,5
24	(233) МБОУ «Мелеховская ООШ №2 имени С.Г. Симонова» Ковровского района	12,5	16,67	87,5
25	(88) МБОУ СОШ № 13 о. Муром	11,76	44,12	88,24
26	(40) МБОУ СОШ 45 г. Владимира	11,63	39,53	88,37
27	(286) МБОУ КСОШ №2Петушинского района	11,43	34,29	88,57
28	(221) МКОУ Першинская СОШ Киржачского района	11,11	22,22	88,89
29	(208) МБОУ ООШ № 3 г. Камешково	10,91	23,64	89,09
30	(25) МБОУ «СОШ № 29» г. Владимира	10,81	36,49	89,19

ВЫВОДЫ о характере результатов ОГЭ по математике в 2023 году и в динамике:

Анализ результатов экзамена по математике позволяет считать, что большинство выпускников справились с решением экзаменационной работы, то есть владеют математическими знаниями и умениями не только на базовом, но и на повышенном и высоком уровнях.

Согласно данным в 2023 году среди девятиклассников Владимирской области процент участников экзамена, которые получили неудовлетворительную отметку, уменьшился на 0,89% по сравнению с предыдущим годом. В сравнении с 2022 учебным годом количество выпускников, получивших за экзамен отметку «3» также уменьшилось на 9,04%, почти на 7% стало больше «хорошистов», а количество учеников, которым за экзамен была выставлена отметка «5», увеличилось в 1,8 раз (2023 год – 6,59%, 2022 год – 3,58%).

Абсолютная успеваемость по математике в 2023 году во Владимирской области составила 95,96%, качественная – 43,83%. По сравнению с предыдущим годом отмечается увеличение показателей и абсолютной, и качественной успеваемости.

В связи с чем можно сделать вывод о том, что в текущем году наблюдается положительная динамика выполнения ОГЭ по математике у выпускников 9-х классов Владимирской области.

Поскольку ОГЭ по математике является обязательным экзаменом для девятиклассников, работу выполняли во всех АТЕ области. Стоит отметить, что в Муромском и Селивановском районах отсутствуют обучающиеся, не справившиеся с

экзаменом. Наибольший процент «отличников» показали выпускники г.Владимир (9,76%), г.Ковров (8,93%), Селивановского района (8,18%), о. Муром (8,06%).

Наиболее высокий показатель выпускников, не справившихся с экзаменом, в Гороховцево (8,72%), Киржачском (7,66%), Петушинском (6,39%) районах.

3.2. Анализ типичных ошибок участников ОГЭ по математике

КИМ по математике на основе спецификации КИМ ОГЭ, содержал набор задач аналогичных, представленных в демонстрационном варианте. Типы и содержание экзаменационных задач с кратким ответом соответствовали задачам демонстрационного варианта (Часть 1). Третий год в КИМ включён новый блок практико-ориентированных заданий 1–5, направленные на проверку функциональной грамотности школьников. Уровень сложности экзаменационных задач с развернутым ответом №20–25 (Часть 2) соответствовал аналогичным задачам демонстрационного варианта, представленного в спецификации КИМ на сайте ФИПИ <http://www.fipi.ru/>.

КИМ ОГЭ 2023 года не изменен в сравнении с КИМ 2022 года.

В таблице 3-6 используется обобщенный план КИМ по предмету с указанием средних процентов выполнения по каждой линии заданий в регионе

Таблица 3-6

№	Проверяемые элементы содержания / умения	Уровень сложности и задания	Средний процент выполнения	Процент выполнения по региону в группах, получивших отметку			
				«2»	«3»	«4»	«5»
1	Уметь выполнять вычисления и преобразования, уметь использовать приобретённые знания и умения в практической деятельности и повседневной жизни, уметь строить и исследовать простейшие математические модели	Б	86.8	39.6	81.1	97.7	99.2
2	Уметь выполнять вычисления и преобразования, уметь использовать приобретённые знания и умения в практической деятельности и повседневной жизни, уметь строить и исследовать простейшие математические модели	Б	60.5	14.3	43.9	82.9	92.4
3	Уметь выполнять вычисления и преобразования, уметь использовать приобретённые знания и умения в практической деятельности и повседневной жизни, уметь строить и исследовать простейшие математические модели	Б	70.8	22.5	56.7	91.0	98.1
4	Уметь выполнять вычисления и преобразования, уметь использовать приобретённые знания и умения в практической деятельности и повседневной жизни, уметь строить и исследовать простейшие	Б	47.6	8.8	26.9	73.4	89.4

	математические модели						
5	Уметь выполнять вычисления и преобразования, уметь использовать приобретённые знания и умения в практической деятельности и повседневной жизни, уметь строить и исследовать простейшие математические модели	Б	47.2	16.1	29.0	69.9	81.4
6	Уметь выполнять вычисления и преобразования	Б	71.3	16.5	61.8	86.5	93.9
7	Уметь выполнять вычисления и преобразования	Б	85.6	42.5	80.8	94.9	97.5
8	Уметь выполнять вычисления и преобразования, уметь выполнять преобразования алгебраических выражений	Б	69.7	11.2	58.3	87.4	96.0
9	Уметь решать уравнения, неравенства и их системы	Б	73.1	15.6	62.3	90.4	96.6
10	Уметь работать со статистической информацией, находить частоту и вероятность случайного события, уметь использовать приобретённые знания и умения в практической деятельности и повседневной жизни, уметь строить и исследовать простейшие математические модели	Б	83.0	19.8	76.6	95.9	98.5
11	Уметь строить и читать графики функций	Б	66.2	20.3	51.3	86.5	97.5
12	Осуществлять практические расчеты по формулам, составлять несложные формулы, выражающие зависимости между величинами	Б	75.1	12.5	64.6	92.4	98.7
13	Уметь решать уравнения, неравенства и их системы	Б	72.2	27.1	61.2	87.9	98.5
14	Уметь использовать приобретённые знания и умения в практической деятельности и повседневной жизни, уметь строить и исследовать простейшие математические	Б	75.6	28.0	65.5	91.1	96.6
15	Уметь выполнять действия с геометрическими фигурами, координатами и векторами	Б	75.4	11.2	65.4	92.3	97.9

16	Уметь выполнять действия с геометрическими фигурами, координатами и векторами	Б	70.7	7.5	58.4	90.0	97.2
17	Уметь выполнять действия с геометрическими фигурами, координатами и векторами	Б	56.4	8.6	43.6	74.1	87.2
18	Уметь выполнять действия с геометрическими фигурами, координатами и векторами	Б	89.2	26.0	87.0	97.4	99.7
19	Проводить доказательные рассуждения при решении задач, оценивать логическую правильность рассуждений, распознавать ошибочные заключения	Б	60.3	23.4	49.9	73.6	89.7
20	Уметь выполнять преобразования алгебраических выражений, решать уравнения, неравенства и их системы	П	11.9	0.4	0.8	15.7	85.0
21	Уметь выполнять преобразования алгебраических выражений, решать уравнения, неравенства и их системы, строить и читать графики функций, строить и исследовать простейшие математические модели	П	6.6	0.0	0.1	5.6	67.4
22	Уметь выполнять преобразования алгебраических выражений, решать уравнения, неравенства и их системы, строить и читать графики функций, строить и исследовать простейшие математические модели	В	1.0	0.0	0.0	0.2	14.1
23	Уметь выполнять действия с геометрическими фигурами, координатами и векторами	П	7.6	0.0	0.3	8.0	67.7
24	Проводить доказательные рассуждения при решении задач, оценивать логическую правильность рассуждений, распознавать ошибочные заключения	П	7.1	0.0	0.3	6.7	67.9
25	Уметь выполнять действия с геометрическими фигурами, координатами и векторами	В	0.4	0.0	0.0	0.04	6.0

Анализ выполнения заданий с кратким ответом Части 1 показывает, что учащиеся справились с заданиями базового уровня 1-19 от 47,2% до 89,2% (в 2022 году от 23,7% до 88,4%, в 2021 г. от 25,5% до 81,1%). Таким образом, результаты экзамена 2023 года оказались выше результатов за два предыдущих года, что говорит о повышении уровня базовой подготовки основной массы обучающихся к итоговой аттестации в формате ОГЭ.

Задания базового уровня, с процентом выполнения ниже 50 – это № 4 (47,6%) и №5 (47,2%), которые демонстрируют умения выполнять вычисления и преобразования, уметь использовать приобретённые знания и умения в практической деятельности и

повседневной жизни, уметь строить и исследовать простейшие математические модели. Низкий процент выполнения такого рода заданий, показывает, что у обучающихся недостаточно сформирована функциональная математическая грамотность, в том числе читательская грамотность.

Процент выполнения заданий с развернутым ответом Части 2 (задания 20 – 25 повышенного и высокого уровней сложности) составил от 0,4% до 11,9% (в 2022 году от 0,2% до 9,3%; в 2021 году от 0,1% до 12,4% по всем вариантам, использованным в регионе). Все задания повышенного и высокого уровня сложности оказались с процентом выполнения ниже 15, что говорит о невысоком качестве знаний выпускников как 2021 года, так и 2022 года. Особенно недостаточно у обучающихся основной школы сформированы умения выполнять действия с геометрическими фигурами и умения строить и читать графики функций, а также умения строить и исследовать простейшие математические модели.

Экзаменационная работа выявила уровень предметных знаний и умений, сформированный у девятиклассников образовательных организаций региона.

При выполнении алгебраических заданий №№ 1-14 экзаменуемые выполняли вычисления и преобразования, практические расчеты по формулам, решали уравнения, задания с графиками реальных зависимостей, анализировали статистические данные. При выполнении экзаменационной работы допускали ошибки в решении текстовых задач, задач на нахождения вероятности случайного события, в задачах, связанных с функциями и их графиками, а также в практико-ориентированных заданиях №1-№5, являющихся новым типом заданий с 2021 года.

При выполнении геометрических заданий №№ 15-19 экзаменуемые выполняли задания на определение ошибочных заключений, используя теоретический материал по геометрии, решали задачи на вычисление площадей, на нахождение неизвестных элементов геометрической фигуры. При выполнении экзаменационных заданий допускали вычислительные ошибки, проявляли невнимательность при чтении заданий, неверно использовали понятие вписанных фигур в окружность.

Наиболее высокий уровень (от 80% и выше процентов) продемонстрирован учащимися при выполнении заданий:

- №1 (процент выполнения 86,8%) в котором учащиеся должны были продемонстрировать умение использовать приобретенные знания и умения в практической деятельности и повседневной жизни (заполнить таблицы по тексту задачи);

- № 7 (процент выполнения 85,6%), где необходимо было выполнять вычисления и преобразования (работать с координатной прямой);

- №10 (процент выполнения 83,0%), в котором учащиеся должны были продемонстрировать навыки вычисления вероятности случайного события;

- №18 (процент выполнения 89,2%), в которых учащиеся должны были продемонстрировать умение выполнять действия с геометрическими фигурами на клетчатой бумаге, находя площадь параллелограмма.

Достаточно хорошо (от 60% до 79%) обучающиеся справились со следующими заданиями:

- №2 (процент выполнения 60,5%) и №3 (процент выполнения 70,8%), где учащиеся должны были показать умение использовать в практической деятельности и повседневной жизни, приобретённые знания и навыки;

- №6 (процент выполнения 71,3%), в котором учащиеся должны были находить значения выражения, используя правило вычитания обыкновенных дробей;

- №8 (процент выполнения 69,7%), в котором учащиеся должны были показать умение выполнять преобразования алгебраических выражений, содержащихся под знаком квадратного корня и находить его значение при заданном значении параметра a ;

- №9 (процент выполнения 73,1%), в котором учащиеся должны были показать умение решать линейное уравнение;

- №11 (процент выполнения 66,2%), где учащиеся должны были показать умение устанавливать соответствие между линейными функциями и их графиками;

- №12 (процент выполнения 75,1%), в котором учащиеся должны были продемонстрировать навыки проведения практических расчетов по формулам;

- №13 (процент выполнения 72,2%), в котором учащиеся должны были продемонстрировать навыки решения неравенств;

- №14 (процент выполнения 75,6%), где учащиеся должны были показать умение строить и исследовать простейшие математические модели при выполнении текстовой задачи;

- №15 (процент выполнения 75,4%), где учащиеся должны были продемонстрировать умение решать геометрическую задачу, в которой необходимо выполнять действия с геометрическими фигурами для нахождения угла при вершине треугольника;

- №16 (процент выполнения 70,7%), где учащиеся должны были продемонстрировать умение решать геометрическую задачу, в которой необходимо было найти величину вписанного угла;

- №19 (процент выполнения 60,3%), в котором учащиеся должны были продемонстрировать умение на основе знаний теоретического материала по геометрии опделить верные заключения.

Средний уровень (процент выполнения от 50% до 59%) продемонстрировали экзаменуемые при выполнении следующих заданий:

- №17 (процент выполнения 56,4%) - решать простейшие геометрические задачи, в которых необходимо использовать навыки нахождения большего из отрезков, на которые делит среднюю линию трапеции одна из ее диагоналей.

Низкий уровень (ниже 50%) предметных знаний и умений показан экзаменуемыми при выполнении заданий:

- №4 (процент выполнения 47,6%), где учащиеся должны были показать умение использовать в практической деятельности и повседневной жизни, приобретённые знания и навыки (работа с текстом и рисунком). Следует отметить, что процент выполнения аналогичного задания в 2021, 2022 г.г. был значительно ниже и составил соответственно 23,7% и 25,2%;

- №5 (процент выполнения 47,2%), в котором учащиеся должны были продемонстрировать также умение использовать приобретенные знания и умения в практической деятельности и повседневной жизни, выбрав новый тариф абонентской оплаты в месяц. Следует отметить, что процент выполнения аналогичного задания в 2022 году был выше и составил 61,2%, а в 2021 году был ниже и составил 39,8%.

Результаты выполнения заданий базового уровня дают возможность выявить тот круг умений и навыков, отработка которых требует большего внимания в процессе обучения в 7-9 классах. В связи с этим следует больше внимания на уроках алгебры уделять числовой последовательности, решению неравенств, целенаправленно развивать вычислительные навыки учащихся, на уроках геометрии обратить внимание на нахождение компонентов геометрических фигур. Также при анализе выполнения работы выявлены темы, которые требуют более тщательной отработки на уроках математики, на дополнительных занятиях. Результаты свидетельствуют о наличии проблемных зон в подготовке обучающихся: отсутствие навыков самоконтроля, проявляющееся в том, что обучающиеся невнимательно читают условие задания и в результате выполняют не то, что требовалось, не проверяют свой ответ, не оценивают его с точки зрения соответствия условию, что говорит о недостаточном уровне сформированности функциональной математической грамотности обучающихся основной школы.

Анализ выполнения заданий №20-№25 Части 2 (повышенный и высокий уровни сложности) показывает, что у обучающихся недостаточно отработаны умения применять свои знания в измененной ситуации, используя при этом известные из школьного курса методы. Процент выполнения заданий с развернутым ответом за три года представлен в таблице:

Год	2021	2022	2023
Задание 20	12,4%	7,0%	11,9%
Задание 21	8,7%	9,3%	6,6%
Задание 22	1,8%	1,4%	1,0%
Задание 23	6,1%	3,5%	7,6%
Задание 24	5,6%	2,1%	7,1%
Задание 25	0,1%	0,2%	0,4%

Результаты, полученные учащимися, показывают, что процент выполнения заданий с развернутым ответом №21 и №22 (алгебраические задания) на итоговой аттестации в 2023 г. оказался ниже, чем в предыдущие годы, что говорит о недостаточном уровне сформированности умения решать текстовые задачи на движения и умения строить график функции, содержащих переменную под знаком модуля.

Процент выполнения задания №20 в текущем году оказался незначительно выше, чем в 2022 году и незначительно ниже, чем в 2021 году. Таким образом, выпускники текущего года продемонстрировали средний уровень умения решать дробно-рациональные уравнения.

Следует отметить, что в 2023 году обучающиеся значительно лучше справились с геометрическими задачами повышенного уровня сложности №23 и №24, что говорит о более качественной подготовке выпускников к решению данного рода задач.

Анализ работ позволил выявить наиболее типичные ошибки, которые допускали экзаменуемые при решении заданий с развернутым решением.

Задача 20. В данном задании учащимся необходимо было решить уравнение вида

$$\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} - 6 = 0.$$

Задание было направлено на проверку владения формально-оперативными умениями на уровне, несколько превышающем базовый, что является важной характеристикой учащихся, претендующих на повышенную оценку. С заданием справились:

Год	2021	2022	2023
Процент выполнения задания	12,4%	7%	11,9%

При решении задачи №20 учащиеся допускали следующие ошибки:

- вычислительные;
- ошибки при выборе способа решения;
- ошибки при разложении на множители;
- ошибки при нахождении дискриминанта квадратного уравнения;
- ошибки при определении корней исходного уравнения.

Задача 21. Учащимся было предложено решить текстовую задачу на движение наземного транспорта с различными скоростями.

Решение текстовых задач традиционно вызывает трудности даже у «сильных» учащихся. Наибольшие трудности в составлении дробно-рационального уравнения, его решении и выборе правильного ответа. С задачей справились:

Год	2021	2022	2023
Процент выполнения задания	8,7%	9,3%	6,6%

При решении задачи №21 учащиеся допускали ошибки следующих типов:

- при составлении математической модели обучающиеся не указывали наименования (время, скорость, путь) или указывали их частично;

-некоторые обучающиеся не смогли обосновать (пояснить) составление математической модели (дробно-рационального уравнения);

-при решении дробно-рационального уравнения экзаменуемые не учитывали область допустимых значений переменной (или не выполняли проверку полученных значений переменной);

- допускали вычислительные ошибки;
- не указывали ответ на вопрос задачи.

Задача 22. Алгебраическое задание высокого уровня сложности, в котором необходимо:

- построить графика функции, содержащий модуль, $y = \frac{4,5|x|-1}{|x|-4,5x^2}$ и определить, при каких значениях параметра k прямая, $y = kx$, не имеет с графиком общих точек.

С заданием справились:

Год	2021	2022	2023
Процент выполнения задания	1,8%	1,4%	1,0%

Наиболее распространенные ошибки, которые допускали учащиеся:

-при построении графика функции, содержащего переменную под знаком модуля, неверно выполнялось преобразование функции;

- допускались вычислительные ошибки в нахождении точек гиперболы;

-допускались вычислительные ошибки в нахождении дополнительных точек графика функции;

-допускались ошибки при построении гиперболы;

-ошибки при определении значения параметра.

На экзамене учащимся были предложены следующие геометрические задачи.

Задача 23. Геометрическая задача на «вычисление» справились:

Год	2021	2022	2023
Процент выполнения задания	6,1%	3,5%	7,6%

Основные трудности, с которыми столкнулись учащиеся:

- неверное использование обобщенной «теоремы синусов» для нахождения радиуса описанной окружности;

- вычислительные ошибки.

Задача 24.

Геометрическая задача на «доказательство» выполнили:

Год	2021	2022	2023
Процент выполнения задания	5,6%	2,1%	7,1%

Типичный недостаток, который допускали учащиеся, состоял в неумении правильно и в полном объеме обосновать доказываемое утверждение.

Задача 25.

Самая сложная геометрическая задача экзаменационной работы ориентирована на учащихся, имеющих достаточно высокий уровень математической подготовки и владеющих свойствами геометрических фигур, наиболее часто встречающихся в задачах школьного курса планиметрии.

С задачей справились:

Год	2021	2022	2023
Процент выполнения задания	0,1%	0,2%	0,4%

Основные трудности, с которыми столкнулись учащиеся:

- ошибки при построении чертежа по условию задачи;

- ошибки в применении свойства окружности, описанной около четырехугольника;

- недостаточные обоснования при доказательстве, что AOB прямоугольный треугольник и значит OM его высота, опущенная на гипотенузу;

- неверное использования свойства пропорциональности сторон в прямоугольном треугольнике;
- недостаточные обоснования при доказательстве подобия треугольников;
- вычислительные ошибки.

Результаты, полученные экзаменуемыми, и анализ их работ, показывает, что процент выполнения заданий, повышенного и высокого уровней сложности, предполагающих свободное владение материалом курса математики, находится еще на невысоком уровне.

Большая часть образовательных организаций, использовали УМК под редакцией авторов Л.С. Атанасяна (геометрия), А.Г. Мерзляка (алгебра), Ю.Н. Макарычева (алгебра), а остальные образовательные организации в своей практике использовали УМК и других авторов, согласно Федеральному перечню учебников.

В УМК, используемых в образовательных организациях региона, содержится достаточный теоретический и практический материал для решения заданий части 1 и части 2. Однако для решения заданий высокого уровня сложности 22 и 25 необходимо использовать как дополнительную литературу, так и материалы, размещенные на сайте ФИПИ (<http://www.fipi.ru/>), так и лучшие педагогические практики учителей региона по решению данных заданий.

Анализ метапредметных результатов обучения, повлиявших на выполнение заданий КИМ

Согласно ФГОС СОО, должны быть достигнуты не только предметные, но и метапредметные результаты, характеризующиеся овладением познавательных, коммуникативных и регулятивных универсальных учебных действий (УУД). Сформированные УУД позволили экзаменуемым выполнить задания КИМ.

Достижения этих результатов влияет на успешность выполнения заданий КИМ ОГЭ по математике, например, заданий 1 - 5, входящих в КИМ с 2021 года.

Анализ выполнения практико-ориентированных заданий с кратким ответом Части 1 показывает, что учащиеся справились с заданиями базового уровня 1-5 от 47,2% до 86,8% (в 2022 г. от 23,7% до 88,2%).

Процент выполнения заданий с 1-5 за три года представлен в таблице:

	ОГЭ 2021	ОГЭ 2022	ОГЭ 2023
Задание 1	77,6%	88,2%	86,8%
Задание 2	40,8%	55,8%	60,5%
Задание 3	36,2%	54,7%	70,8%
Задание 4	25,2%	23,7%	47,6%
Задание 5	42,6%	61,2%	47,2%

Из таблицы видно, что самое решаемое задание №1, где необходимо по тексту задачи заполнить представленную таблицу. Обучающиеся из условия задачи выбирают требуемые данные. Метапредметный результат этого задания – это «уровень узнавания и понимания», что неплохо демонстрируют выпускники при нахождении и извлечении математической информации из различного контекста.

Задания 2-3 – это «уровень понимания и применения», где выпускники показывают применение математических знаний для решения разного рода проблем. Учащиеся демонстрируют средний результат выполнения данного типа заданий. Из таблицы видно, что за три года отмечается положительная динамика выполнения задач: задание 2 от 40,8% до 60,5%; задание 3 от 36,2% до 70,8%. Это говорит о том, что учителями математики ведется работа по формированию метапредметного результата «понимание и применение математических знаний».

Низкий уровень (ниже 50%) показан экзаменуемыми при выполнении заданий 4-5, где учащиеся должны были показать умение использовать в практической деятельности и повседневной жизни, приобретённые знания и навыки (работа с текстом и рисунком). Метапредметный результат этих заданий соответственно «уровень анализа и синтеза» и «уровень оценки (рефлексии) в рамках предметного содержания». Математическая грамотность состоит в формулирование математической проблемы на основе анализа ситуации (задание 4) и интерпретации и оценивание математических данных в контексте лично значимой ситуации (задание 5).

При выполнении практико-ориентированных задач, затруднения у обучающихся вызывают: способность моделировать, анализировать и преобразовывать информацию, работать с рисунком, таблицей, а также интерпретировать полученные результаты.

Следовательно, учителю необходимо формировать у обучающихся опыт поиска путей решения жизненных задач, учить математическому моделированию реальных ситуаций и переносить способы решения учебных задач на реальные объекты.

В каждой теме при изучении математики в основной школе в соответствии с кодификатором содержания выполнять задания, построенные на реальных жизненных сюжетах. Акцент – на обсуждение: обсуждение ситуации, выявление математических аспектов, всех данных, переформулирование и моделирование объектов, перевод на язык математики, обсуждение ограничений, допущений, различные способы решения, обсуждение их рациональности; обсуждение результатов: оценка и интерпретация, соотнесение с ситуацией.

Регулярно включать в ход урока задания на *«изменение и зависимости»*, *«пространство и форма»*, *«неопределенность»*, *«количественные рассуждения»*. Предъявление обучающимся и выполнение ими контекстных заданий, разработанных на основе проблемных ситуаций, является, важным видом познавательной и практической деятельности, в ходе которой развивается функциональная грамотность, в том числе и математическая. И эта деятельность требует, во-первых, применения осваиваемых школьниками знаний, умений и опыта, а во-вторых, переноса осваиваемых в рамках учебного предмета «Математика» знаний и умений на более широкую познавательную и практическую область, расширяющуюся по мере обучения школьников.

ВЫВОДЫ об итогах анализа выполнения заданий, групп заданий:

Проведенный анализ показал, что перечень элементов умений, усвоение которых школьниками региона в целом можно считать достаточным на базовом уровне:

- Уметь выполнять вычисления и преобразования;
- Уметь работать со статистической информацией.

Перечень элементов умений, усвоение которых школьниками региона в целом нельзя считать достаточным на базовом уровне:

- Уметь использовать приобретенные знания и умения в практической деятельности и повседневной жизни;
- Уметь строить и исследовать простейшие математические модели;
- Уметь выполнять действия с геометрическими фигурами при выполнении задач на «нахождение неизвестных компонентов заданной фигуры».

Результаты выполнения заданий базового уровня с кратким ответом дают возможность выявить тот круг умений и навыков, отработка которых требует большего внимания в процессе обучения в 7-9 классах. В связи с этим следует больше внимания на уроках алгебры уделять числовой последовательности, решению неравенств, целенаправленно развивать вычислительные навыки учащихся, на уроках геометрии обратить внимание на нахождение компонентов геометрических фигур. Также при анализе выполнения работы выявлены элементы содержания (использовать

приобретенные знания и умения в практической деятельности и повседневной жизни; строить и исследовать простейшие математические модели - задачи на проценты; выполнять действия с геометрическими фигурами при выполнении задач на «нахождения неизвестных компонентов заданной фигуры», в частности трапеция), которые требуют более тщательной отработки на уроках математики, на дополнительных занятиях

Результаты выполнения заданий с развернутым ответом части 2 показывают, что процент выполнения заданий, повышенного и высокого уровней сложности, предполагающих свободное владение материалом курса математики, находится еще на невысоком уровне.

Результаты свидетельствуют о наличии проблемных зон в подготовке обучающихся: отсутствие навыков самоконтроля, проявляющееся в том, что обучающиеся невнимательно читают условие задания и в результате выполняют не то, что требовалось, не проверяют свой ответ, не оценивают его с точки зрения соответствия условию, что говорит о недостаточном уровне сформированности функциональной математической грамотности обучающихся основной школы.

Достижения метапредметных результатов влияет на успешность выполнения заданий КИМ по математике основной школы. Следовательно, учителю необходимо формировать у обучающихся опыт поиска путей решения математических задач, учить математическому моделированию реальных ситуаций и переносить способы решения учебных задач на реальные объекты.

3.3. Методические рекомендации по выполнению заданий с развернутым ответом ОГЭ

Приведем решение и критерии оценивания заданий с развернутым ответом открытого варианта КИМа ОГЭ по математике.

Приведем решение и критерии оценивания заданий с развернутым ответом вариантов КИМов ОГЭ по математике основной волны.

Задание 20.

Решите уравнение $\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} - 6 = 0$.

Решение.

Пусть $\frac{1}{x} = t$, тогда исходное уравнение переписывается как

$$t^2 - t - 6 = 0.$$

Дискриминант этого уравнения $D = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6) = 25 = 5^2$ положителен, поэтому его корни будут равны

$$t_1 = \frac{1-5}{2} \quad \text{и} \quad t_2 = \frac{1+5}{2}$$

или

$$t_1 = -2 \quad \text{и} \quad t = 3.$$

Обратная замена приводит к двум простейшим уравнениям

$$\frac{1}{x} = -2 \quad \text{и} \quad \frac{1}{x} = 3,$$

а, следовательно, $x = -\frac{1}{2}$ и $x = \frac{1}{3}$.

Ответ: $-\frac{1}{2}, \frac{1}{3}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение доведено до конца, но допущена ошибка вычислительного характера, с её учётом дальнейшие шаги выполнены верно	1

Содержание критерия	Баллы
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	2

Задание 21.

Два автомобиля одновременно отправляются в 540-километровый пробег. Первый едет со скоростью на 30 км/ч большей, чем второй, и прибывает к финишу на 3 ч раньше второго. Найдите скорость первого автомобиля.

Решение.

Пусть x км/ч – скорость первого автомобиля, тогда $(x - 30)$ км/ч – скорость второго автомобиля. Время, затраченное на 540-километровый пробег, первым автомобилем и вторым автомобилем, составит $\frac{540}{x}$ ч и $\frac{540}{x-30}$ ч, соответственно. Разность во времени между финишем первой и второй машинами будет равна $\left(\frac{540}{x-30} - \frac{540}{x}\right)$ ч или 3 ч по условию задачи. Составим уравнение.

Уравнение.

По условию задачи $x > 30$

$$\frac{540}{x-30} - \frac{540}{x} = 3, \quad \frac{180}{x-30} - \frac{180}{x} = 1, \quad \frac{180}{x-30} - \frac{180}{x} - 1 = 0,$$

$$\frac{180x - 180(x-30) - x(x-30)}{x(x-30)} = 0,$$

$$\begin{cases} 180x - 180x + 5400 - x^2 + 30x = 0, \\ x(x-30) \neq 0, \\ \begin{cases} -x^2 + 30x + 5400 = 0, \\ x \neq 0, \\ x \neq 30. \end{cases} \end{cases}$$

Решим квадратное уравнение $x^2 - 30x - 5400 = 0$, найдя дискриминант, делённый на четыре:

$$\frac{D}{4} = (-15)^2 - 1 \cdot (-5400) = 225 + 5400 = 5625 = 75^2 > 0.$$

Квадратное уравнение имеет два различных корня:

$$\begin{aligned} x_1 = 15 - 75 \quad \text{или} \quad x_2 = 15 + 75 \\ x_1 = -60 \quad \quad \quad x_2 = 90. \end{aligned}$$

Первый корень $x_1 = -60$ не удовлетворяет условию задачи $x > 30$, поэтому скорость первого автомобиля равна 90 км/ч.

Ответ: 90 км/ч.

Содержание критерия	Баллы
Ход решения задачи верный, получен верный ответ	2
Ход решения верный, все его шаги присутствуют, но допущена ошибка вычислительного характера	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	2

Задание 22.

Постройте график функции

$$y = \frac{4,5|x| - 1}{|x| - 4,5x^2}.$$

Определите, при каких значениях k прямая $y = kx$ не имеет с графиком общих точек.

Решение.

Преобразуем выражение $\frac{4,5|x|-1}{|x|-4,5x^2}$, сделав замену $|x| = t$. Имеем

$$\frac{4,5t-1}{t-4,5t^2} = \frac{4,5t-1}{-t(4,5t-1)} = -\frac{1}{t'}$$

где $t \neq 0$ и $4,5t-1 \neq 0$, $4,5t \neq 1$, $t \neq \frac{1}{4,5}$, $t \neq \frac{2}{9}$.

Значит, $y = -\frac{1}{t}$, где $t \neq 0$ и $t \neq \frac{2}{9}$.

Обратная замена приводит к функции

$$y = -\frac{1}{|x|}, \text{ где } x \neq 0 \text{ и } |x| \neq \frac{2}{9}$$

или

$$y = \begin{cases} -\frac{1}{x} & \text{при } x > 0, x \neq \frac{2}{9}, \\ \frac{1}{x} & \text{при } x < 0, x \neq -\frac{2}{9}. \end{cases}$$

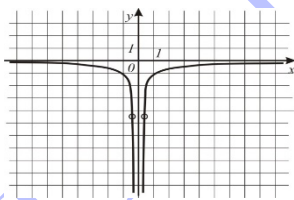
Графиком функции $y = -\frac{1}{x}$ при $x > 0$, $x \neq \frac{2}{9}$ является ветвь гиперболы, расположенная в четвертой четверти, с выколотой точкой $(\frac{2}{9}, -\frac{9}{2})$, проходящая через точки

x	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	1	2	3	4
y	-9	-3	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{4}$

Графиком функции $y = \frac{1}{x}$ при $x < 0$, $x \neq -\frac{2}{9}$ также будет ветвь гиперболы, находящаяся в третьей четверти, с выколотой точкой $(-\frac{2}{9}, -\frac{9}{2})$, проходящая через точки

x	$-\frac{1}{9}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{2}$	-1	-2	-3	-4
y	-9	-3	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{4}$

Построим график этой функции



Прямая $y = kx$ не пересекает график функции $y = \frac{4,5|x|-1}{|x|-4,5x^2}$, если она совпадает с осью Ox (при $k = 0$), либо проходит через выколотую точку, т.е. если справедливо равенство

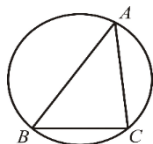
$$\begin{aligned} -\frac{9}{2} &= k \cdot \frac{2}{9} \quad \text{или} \quad -\frac{9}{2} = k \cdot \left(-\frac{2}{9}\right), \\ k &= -\frac{9}{2} : \frac{2}{9} \quad \text{или} \quad k = -\frac{9}{2} : \left(-\frac{2}{9}\right), \\ k &= -\frac{81}{4} \quad \text{или} \quad k = \frac{81}{4}. \end{aligned}$$

Итак, прямая $y = kx$ не имеет общих точек с графиком функции $y = \frac{4,5|x|-1}{|x|-4,5x^2}$ при $k = 0$, $k = -\frac{81}{4}$, $k = \frac{81}{4}$.

Ответ: $k = 0$, $k = -\frac{81}{4}$, $k = \frac{81}{4}$.

Содержание критерия	Баллы
График построен верно, верно найдены искомые значения параметра	2
График построен верно, но искомые значения параметра найдены неверно или не найдены	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	2

Задание 23.



Углы B и C треугольника ABC равны соответственно 62° и 88° . Найдите BC , если радиус окружности, описанной около треугольника ABC , равен 12.

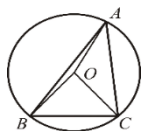
Авторское решение.

Пусть R – радиус описанной окружности, тогда $R = \frac{BC}{2 \sin A}$.

Получаем, что $BC = 12 \cdot 2 \cdot \sin(180^\circ - 62^\circ - 88^\circ) = 12 \cdot 2 \cdot \sin 30^\circ = 12$.

Ответ: 12.

Решение.



- $\angle BAC = 180^\circ - \angle ABC - \angle ACB$, $\angle BAC = 180^\circ - 62^\circ - 88^\circ = 180^\circ - 150^\circ = 30^\circ$, т.к. сумма углов треугольников равна 180° .
- $\angle BAC$ – вписанный в окружность, значит соответствующий ему центральный угол: $\angle BOC = 2 \cdot 30^\circ = 60^\circ$.
- $\triangle BOC$ – равнобедренный, т.к. $OB = OC = R$, значит $\angle OBC = \angle OCB = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle BOC)$, $\angle OBC = \angle OCB = \frac{1}{2}(180^\circ - 60^\circ) = 60^\circ$.
- $\triangle BOC$ – равносторонний, следовательно, $OB = OC = BC = 12$.

Ответ: 12.

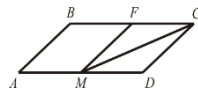
Содержание критерия	Баллы
Ход решения верный, все его шаги выполнены правильно, получен верный ответ	2
Ход решения верный, все его шаги выполнены правильно, но даны неполные объяснения или допущена одна вычислительная ошибка	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	2

Задание 24.

Сторона AD параллелограмма $ABCD$ вдвое больше стороны CD . Точка M – середина стороны AD . Докажите, что CM – биссектриса угла BCD .

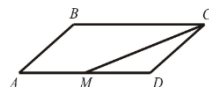
Авторское доказательство.

Проведём прямую MF параллельно стороне CD (см. рисунок). Поскольку $AM = MD = CD$, параллелограмм $CDMF$ является ромбом, поэтому диагональ CM ромба $CDMF$ делит угол FCD пополам. Значит, CM – биссектриса угла BCD .



Доказательство.

- По условию $AD = 2CD$ и $AM = MD$, значит $MD = CD$, $\triangle MDC$ – равнобедренный и $\angle CMD = \angle MCD$.
- $\angle CMD = \angle BCM$ как внутренние накрест лежащие при параллельных прямых BC , AD и секущей CM .
- $\angle CMD = \angle MCD$ и $\angle CMD = \angle BCM$, следовательно, $\angle MCD = \angle BCM$.



4. $\angle MCD = \angle BCM$, значит CM – биссектриса угла BCD .

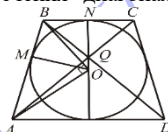
Содержание критерия	Баллы
Доказательство верное, все шаги обоснованы	2
Доказательство в целом верное, но содержит неточности	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	2

Задание 25.

В равнобедренную трапецию, периметр которой равен 100, а площадь равна 500, можно вписать окружность. Найдите расстояние от точки пересечения диагоналей трапеции до её меньшего основания.

Решение.

Пусть BC – меньшее основание, AB – боковая сторона, AD – большее основание трапеции $ABCD$, M – точка касания окружности со стороной AB , N – со стороной BC , Q – точка пересечения диагоналей, O – центр окружности, r – её радиус (см. рис.).



Поскольку трапеция описана около окружности, сумма её боковых сторон равна сумме оснований, то есть 50, поэтому

$$S_{ABCD} = 2r \cdot \frac{AD + BC}{2} = 50r.$$

Значит, $r = 10$.

Прямые AD и BC параллельны. Значит, $\angle ABC + \angle BAD = 180^\circ$. Поскольку лучи AO и BO – биссектрисы углов BAD и ABC соответственно, получаем: $\angle ABO + \angle BAO = 90^\circ$. Значит, треугольник AOB прямоугольный, а OM – его высота, опущенная на гипотенузу, поэтому

$$\begin{aligned} AM \cdot MB &= OM^2 = r^2; & AM(AB - AM) &= r^2; \\ AM(25 - AM) &= 100. \end{aligned}$$

Учитывая, что $AM > BM$, из этого уравнения находим, что $AM = 20$. Тогда $AD = 40$, $BC = 10$. Треугольник AQD подобен треугольнику CQB с коэффициентом подобия 4, значит, высота QN треугольника BQC составляет $\frac{1}{5}$ высоты трапеции, то есть диаметра вписанной в неё окружности.

Следовательно, $QN = \frac{1}{5} \cdot 20 = 4$.

Ответ: 4.

Содержание критерия	Баллы
Ход решения задачи верный, получен верный ответ	2
Ход решения верный, все его шаги присутствуют, но допущена ошибка вычислительного характера	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	2

3.4. Рекомендации по совершенствованию организации и методики преподавания предмета в основной школе

- Учителям, методическим объединениям учителей.

Результаты экзамена по математике позволили выявить ряд проблем, которые необходимо учитывать при обучении математике и подготовке обучающихся к итоговой аттестации в формате ОГЭ.

Важным условием успешной подготовки к экзамену является системность в отслеживании результатов учеников по всем темам и в своевременной коррекции уровня усвоения учебного материала. Одним из принципов построения методической подготовки к итоговой аттестации считается принцип «жесткого ограничения времени» при выполнении тестов. В целях эффективного использования времени на экзамене нужно также учить школьников приемам быстрого и рационального счета, также формировать читательскую грамотность при работе с текстом как основной составляющей функциональной грамотности обучающихся: работа с рисунками, схемами, графиками, текстом, применении знаний на практике. Уделять внимание работе с вопросами, вычленению ключевых теорий, на базе которых строятся ответы.

Низкий процент выполнения геометрических заданий, особенно заданий 16, 23, 24 свидетельствует о сохраняющихся системных недостатках в преподавании геометрии в основной школе. Также причиной является рассмотрение лишь тех типов задач, которые встречались на экзамене в предыдущие годы, вместо полноценного изучения геометрии. Таким образом, следует рекомендовать при подготовке к экзамену особое внимание уделить формированию и развитию умений выполнять действия с геометрическими фигурами, предлагать задания с разными числовыми данными по одному рисунку, предлагать задания, где необходимо определять различные элементы фигуры и/или вычислять их числовые характеристики, уделять больше внимания развитию умения верно пользоваться геометрическим чертежом, добиваться достаточного уровня владения теоретическим материалом.

При подготовке к экзамену особое внимание следует уделять решению задач, в которых необходимо составить математическую модель в виде уравнения или системы уравнений. Не менее важно отрабатывать навыки решения различных типов уравнений, встречающихся при решении подобного вида задач.

Следует рекомендовать при подготовке к экзамену обратить внимание на формирование вычислительных навыков учащихся, а также корректное использование данных задачи при составлении математической модели (задание 21).

При подготовке к экзамену обратить внимание: на корректное выполнение всех преобразований необходимых при решении заданий высокого уровня сложности 22 и 25; на формирование математической культуры при решении задач, требующих доказательства или обоснования доказываемого утверждения или факта.

На основании вышеизложенного, рекомендуем педагогам проанализировать результаты государственной итоговой аттестации по математике на заседаниях городских (районных) методических объединений учителей математики; планировать работу на 2023-2024 учебный год с учетом:

- изучения нормативных документов Министерства Просвещения РФ, методических писем и методических рекомендаций ФИПИ <http://www.fipi.ru/>, где содержатся нормативные требования к проведению ОГЭ, характеристика контрольных измерительных материалов по математике, рекомендации по использованию и интерпретации результатов выполнения экзаменационных работ и т. п. Ознакомление обучающихся с демоверсиями ОГЭ 2024 г. (акцент на повторение /изучение материала, освоение навыков;

- включения в учебный план общеобразовательной организации факультативных курсов (спецкурсов, индивидуальных занятий и т.п.), стимулирующие интерес к предмету и развивающие математические способности, начиная с 5 класса;

- использования «Открытого банка заданий ОГЭ. Математика», созданного авторским коллективом ФИПИ с целью подготовки учащихся к итоговой аттестации <http://www.fipi.ru/>;

- использование банка заданий по формированию математической грамотности ИСРО РАО <http://skiv.instrao.ru/bank-zadaniy/matematicheskaya-gramotnost/>;

- увеличения количества часов на изучение математики из части учебного плана, самостоятельно формируемой участниками образовательных отношений и (или) предусмотреть включение в учебный план общеобразовательной организации элективных курсов, направленных на подготовку обучающихся к сдаче государственной итоговой аттестации в 9 классах;

- выявление проблемных тем теоретического материала по математике за курс основной школы; организация индивидуальных и групповых занятий по восполнению пробелов в знаниях отдельных теоретических вопросов курса математики; на занятиях спецкурсов, консультациях продолжить отработку навыков практического применения теории; на уроках повторения пройденного материала уделить особое внимание вопросам и заданиям, вызвавшим затруднения у школьников;

- закрепление навыков смыслового чтения и анализа текста заданий (типа 1 - 5), т.к. у обучающихся недостаточно сформированы как читательская грамотность, так и умения использовать приобретённые знания в практической деятельности и повседневной жизни;

- усиление внимания к геометрическим задачам на решение и доказательство; необходимо обратить самое внимание на изучение геометрии – непосредственно с 7 класса, когда начинается систематическое изучение этого предмета. Подготовку выпускников следует начинать не с рассмотрения примеров решения геометрических задач вариантов ОГЭ, а с изучения свойств геометрических фигур и их элементов. Задачи необходимо решать по темам, например, «Треугольник и его элементы», «Окружность и круг» и т.д.;

- проведение анализа условия задачи, поиска пути решения, применения известных алгоритмов в измененной ситуации (стандартные методы решения простейших уравнений и неравенств, преобразование алгебраических выражений, свойства геометрических фигур при решении планиметрических задач);

- рассмотрение разнообразных методов решения задач с параметрами;

- усиление работы по повышению уровня вычислительных навыков учащихся (например, с помощью устной работы на уроках: применение арифметических законов действий при работе с рациональными числами, свойства степеней, корней и др.), что позволит им успешно выполнять задания, избегая досадных ошибок, применяя рациональные методы вычислений;

- повышение мотивации учащихся к самостоятельному изучению дополнительного материала, без которого трудно решить задания повышенного и высокого уровня сложности;

- отработка у обучающихся быстрого и правильного выполнения заданий Части 1, постоянно контролировать умения, необходимые для выполнения заданий базового уровня;

- организация дифференцированного подхода с наиболее подготовленными учащимися для успешного выполнения заданий Части 2. Это относится и к работе на уроке, и к дифференциации домашних заданий и заданий, предлагаемых обучающимся на контрольных, проверочных, диагностических работах.

В современных условиях развития цифровой образовательной среды рекомендуем использовать возможности сетевого взаимодействия с обучающимися, организация изучения тем и итоговое повторение на основе интерактивных уроков, применяя образовательные платформы (например, <https://эдо.образование33.рф> и др.).

На все это нужно обращать особое внимание, выявляя «группы риска» обучающихся, с целью организации эффективной подготовки таких учащихся к государственной итоговой аттестации.

- *Муниципальным органам управления образованием.*
 - провести диагностику факторов, влияющих на качество образования в общеобразовательных организациях;
 - продолжить работу муниципальных ресурсных центров по подготовке к государственной итоговой аттестации по математике и другим предметам;
 - провести работу со школами «зона риска» по недопущению попадания данных школ с низкими образовательными организациями;
 - усиление контроля подготовки учащихся к государственной итоговой аттестации в форме ОГЭ.

- *Прочие рекомендации.*
 - проведение учителями диагностических работ в формате ОГЭ и учет их результатов по ликвидации пробелов в знаниях обучающихся, размещенных на сайте СтатГрад <https://statgrad.org/>;
 - посещение учениками занятий факультативных, элективных курсов, курсов по выбору;
 - обеспечение формирования функциональной математической грамотности школьников, как необходимого условия для выполнения заданий ОГЭ по математике.

Рекомендации по организации дифференцированного обучения школьников с разным уровнем предметной подготовки

- *Учителям, методическим объединениям учителей:*

Отбор учебного материала для повторения и закрепления изученного учебного материала необходимо осуществлять с учетом уровня подготовки обучающихся, уделяя наибольшее внимание традиционно сложным для усвоения темам. При этом целесообразно применять дифференцированный подход, при котором следует разделить обучающихся на группы:

 - мотивированным обучающимся, полноценно усвоившим учебный материал, предлагать дополнительные вопросы, расширяющие содержание ранее изученного материала, тренировочные варианты для выполнения, проводить консультации по возникающим вопросам;
 - обучающимся, допускающим индивидуальные ошибки при выполнении заданий КИМ, работать над повторением и закреплением теории тем, отработкой групп заданий из Открытого банка ФИПИ. Методические рекомендации для обучающихся по организации индивидуальной подготовки к ОГЭ по учебному предмету, представленных на официальном сайте ФИПИ <http://www.fipi.ru/>;
 - обучающимся с низким уровнем мотивации, испытывающим затруднения при усвоении ранее изученных тем, предлагать задания на повторение и закрепление ранее изученного материала, отработать задания до автоматизма из «Открытого банка заданий ОГЭ. Математика» (необходимо определить количество и тип заданий, выполнение которых обеспечит преодоление минимального порога).

По организации дифференцированного обучения школьников с разными уровнями предметной подготовки необходимо сделать акцент на индивидуальные особенности учащихся и включить в методическую работу поэтапное дифференцированное обучение:

- диагностический этап: первичная диагностика, которая позволит определить имеющийся уровень сформированности знаний, умений, навыков по предмету, а также сформированность метапредметных УУД обучающихся;
- содержательно-методический: выстраивание индивидуальной траектории по подготовке к ГИА, исходя из уровня подготовки обучающихся. Разработка теоретических и практических занятий, направленных на совершенствование и повышение уровня; разработка самооценочных диагностических инструментов, которые позволяют учащимся

самостоятельно выстраивать свой образовательный маршрут. Предполагает организацию педагогического взаимодействия учитель-ученик (группа учеников);

- рефлексивный: обеспечение промежуточного контроля уровня готовности учащихся к сдаче экзамена по математике и корректировка индивидуального образовательного маршрута.

Одним из условий, влияющим на успешную подготовку к ОГЭ по математике, является реализация индивидуального подхода в работе с учеником. Для этого может быть использован график, который отражает порядок прохождения тем и результаты усвоения изученного материала, в том числе и выполнения заданий. Важнейшим фактором, определяющим успешную сдачу экзамена, является также формирование метапредметных результатов обучения, а также формирования умения мыслить не шаблонно при выполнении заданий. Для реализации индивидуального подхода возможно применение и цифровых образовательных технологий.

○ *Администрациям образовательных организаций:*

- обеспечение организации подготовки к государственной итоговой аттестации в форме ОГЭ по математике (9 класс) с учетом дифференцированного подхода (деления учащихся по уровню подготовки), которая включает в себя формирование курсов по повторению основных разделов математики (числа и вычисления, уравнения и неравенства, функции, геометрия, вероятность и статистика); проведение индивидуальных консультаций и пробников в течение года;

- включение в план внутришкольного контроля подготовку к ОГЭ по математике учащихся разного уровня, посещение уроков с целью проверки реализации системно-деятельностного подхода, формирования функциональной грамотности, включение в разные этапы урока элементов подготовки к ОГЭ; осуществление дифференцированного подхода к организации подготовки к ОГЭ;

- регулярное информирование родителей учащихся об успехах и проблемах обучающихся при подготовке к государственной итоговой аттестации в форме ОГЭ: организация и проведение родительских собраний с целью информирования законных представителей школьников о важности и процедуре проведения государственной итоговой аттестации в форме ОГЭ.

○ *Муниципальным органам управления образованием.*

- организация контроля за деятельностью образовательных организаций по подготовке обучающихся к итоговой аттестации;

- обеспечение проведение централизованных диагностических работ для отслеживания уровня подготовки учащихся к ОГЭ по математике и принятия решения управленческих решений по итогам мониторинговых процедур.

○ *Прочие рекомендации.*

- на уровне школы необходимо выстроить дифференцированную модель подготовки учащихся к ОГЭ по математике, в рамках которой будет сконструирован диагностический, содержательный и рефлексивно-оценочный этап.

ЧАСТЬ IV. МЕРЫ МЕТОДИЧЕСКОЙ ПОДДЕРЖКИ УЧИТЕЛЯ МАТЕМАТИКИ

4.1. Дорожная карта по развитию региональной системы образования на 2023-2024 учебный год

№	Дата	Мероприятие (указать тему и организацию, которая планирует проведение мероприятия)
1	В течение года	Разработка и проведение для учителей математики входного тестирования, направленного на проверку уровня профессиональной компетентности педагога на знание предмета. Тестирование проводится в рамках курсовой подготовки слушателей курсов Владимирского института развития образования имени Л.И. Новиковой (ГАОУДПО ВО ВИРО)
2	В течение года	Организация и проведение по заявкам территорий и образовательных организаций репетиционного тестирования по математике для учащихся 9 и 11 классов, в формате ЕГЭ (подготовка контрольно-измерительных материалов, проведение консультаций с учащимися, проверка и анализ работ учащихся), ГАОУДПО ВО ВИРО
3	В течение года	Организация работы сообщества учителей математики http://wiki.vladimir.i-edu.ru (обсуждение вопросов, связанных с итоговой аттестацией обучающихся, представление опыта работы педагогов в разделе «Методическая копилка»), ГАОУДПО ВО ВИРО
4	В течение года	Обобщение и распространения опыта учителей математики успешно готовящих учащихся к итоговой аттестации по математике (с занесением опыта в банк данных ВИРО), https://viro33.ru/
5	В течение года	Проведение практических занятий для учителей математики региона по подготовке обучающихся к итоговой аттестации на базе стажировочных площадок (МБОУ СОШ №9, МАОУ СОШ №25, МАОУ Гимназия №35 г. Владимира): -методы и приемы решения математических задач повышенной и высокой сложности: с экономическим содержанием, с параметром, задачи олимпиадного характера; - методы и приемы решения геометрических задач: планиметрических и стереометрических; -формирование функциональной грамотности школьников, в том числе читательской и математической; -использование ЦОС в образовательной практике учителей математики.
6	В течение года	Проведение курсов повышения квалификации для учителей математики региона на базе ГАОУ ДПО ВО ВИРО: - краткосрочные курсы по теме «Методика подготовки учащихся к итоговой аттестации по математике», в очной и заочной (дистанционной) модели обучения, март 2024 года, 36 часов, https://довиро.образование33.рф/course/view.php?id=51
7	1 ноября 2023г.	Творческий конкурс для педагогов «Решение задач повышенной сложности». Информация о конкурсе размещена на странице http://wiki.vladimir.i-edu.ru/index.php?title=Конкурс_Решение_задач_повышенной_сложности

8	ноябрь 2023г.	Конкурс методических разработок учителей математики «Современный урок математики: базовые исследовательские действия», ГАОУДПО ВО ВИРО
9	декабрь 2023 г.	Круглый стол: «Современный урок: опыт, технологии реализации»

Возможные направления повышения квалификации учителей математики (очная, очно-заочная и дистанционные формы обучения):

1. Методика подготовки учащихся к итоговой аттестации по математике.
2. Практикум по решению задач повышенной сложности.
3. Методика изучения сложных тем курса математики основной и старшей школы.
4. Формирование математической грамотности школьников в условиях реализации обновленных ФГОС ООО и ФГОС СОО.

Проведение в рамках курсов ПК практикумов по использованию педагогических методик и технологий, способствующих повышению мотивации школьников к изучению математики, практикумов по обмену опытом решения трудных вопросов школьного курса математики.