ДЕПАРТАМЕНТ ОБРАЗОВАНИЯ
И МОЛОДЕЖНОЙ ПОЛИТИКИ
ВЛАДИМИРСКОЙ ОБЛАСТИ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЛАДИМИРСКОЙ ОБЛАСТИ
«РЕГИОНАЛЬНЫЙ ИНФОРМАЦИОННО-АНАЛИТИЧЕСКИЙ
ЦЕНТР ОЦЕНКИ КАЧЕСТВА ОБРАЗОВАНИЯ»

# Результаты государственной итоговой аттестации по математике

Владимир
2022

УДК 371.26(470.45)"2022":004(082)
ББК 74.202.8(2)я43+32.97я43
Р34

Одобрено организационно-методическим советом ГБУ ВО РИАЦОКО
(протокол - № 31 от 29.09.2022 г.)

**Составители:**
**Сидорова И.В.**, кандидат физико-математических наук, заведующий кафедрой информационных технологий ВФ РАНХиГС;
**Антонова Е.И.**, кандидат педагогических наук, заведующий кафедрой естественно-математического образования ГАОУДПО ВО ВИРО;
**Жукова А.А.**, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры информационных технологий ВФ РАНХиГС;
**Данилов В.В.**, заместитель директора ГБУ ВО РИАЦОКО.

**Ответственный редактор:**
**Мансурова С.И.**, директор Государственного бюджетного учреждения Владимирской области «Региональный информационно-аналитический центр оценки качества образования».

.

Р34 Результаты государственной итоговой аттестации по математике Сидорова И.В., Антонова Е.И., Жукова А.А., Данилов В.В – Владимир: ГБУ ВО РИАЦОКО, 2022. – 84 с.
ISBN 978-5-9631-1007-2

Предлагаемый сборник содержит статистический анализ результатов ЕГЭ и ОГЭ по математике в 2022 году во Владимирской области и рекомендации по подготовке к экзамену.

В рекомендациях приведен анализ типичных ошибок участников ЕГЭ (профильный уровень) и ОГЭ по математике. Подробно представлены методические рекомендации по выполнению заданий с развернутым ответом Части 2, а также рассмотрены критерии оценки заданий.

Материалы пособия педагоги могут использовать для организации и проведения текущего и итогового контроля качества знаний учащихся в период подготовки их к итоговой аттестации в формате ЕГЭ и ОГЭ.

Сборник материалов предназначен для руководителей, заместителей руководителей, учителей математики общеобразовательных организаций, реализующих Государственные образовательные стандарты общего образования.

УДК371.26(470.45)"2022":004(082)
ББК 74.202.8(2)я43+32.97я43

ISBN 978-5-9631-1007-2

СОДЕРЖАНИЕ

**Перечень условных обозначений, сокращений и терминов**

| | |
|---|---|
| АТЕ | Административно-территориальная единица |
| ГИА | Государственная итоговая аттестация по образовательным программам общего образования |
| ЕГЭ | Единый государственный экзамен |
| ОГЭ | Обязательный государственный экзамен |
| КИМ | Контрольные измерительные материалы |
| ОО | Образовательная организация, осуществляющая образовательную деятельность по имеющей государственную аккредитацию образовательной программе |
| СОШ | Средняя образовательная школа, осуществляющая образовательную деятельность по имеющей государственную аккредитацию образовательной программе |
| СПО | Образовательная организация среднего профессионального образования, осуществляющая образовательную деятельность по имеющей государственную аккредитацию образовательной программе |
| РИС | Региональная информационная система обеспечения проведения государственной итоговой аттестации обучающихся, освоивших основные образовательные программы основного общего и среднего общего образования |
| Участник ЕГЭ (ОГЭ) /участник экзамена / участник | Обучающиеся, допущенные в установленном порядке к ГИА в форме ЕГЭ (ОГЭ), выпускники прошлых лет, допущенные в установленном порядке к сдаче экзамена |

# Введение

**Единый государственный экзамен** (ЕГЭ) — это форма государственной итоговой аттестации (ГИА) по образовательным программам среднего общего образования. ЕГЭ по математике разделен на два уровня – базовый и профильный. Два уровня государственной итоговой аттестации по математике позволяют выпускникам с разным уровнем математической подготовки более полно реализовать свои возможности. ЕГЭ по математике на профильном уровне проводится для тех участников, которым его результаты нужны для поступления в вуз.

**Обязательный государственный экзамен** (ОГЭ) — это форма государственной итоговой аттестации (ГИА) по образовательным программам основного общего образования.

При проведении ЕГЭ (ОГЭ) используются контрольные измерительные материалы (КИМ), представляющие собой комплексы заданий стандартизированной формы. Для оформления ответов на задания КИМ используются специальные бланки. ГИА организуется и проводится Федеральной службой по надзору в сфере образования и науки (Рособрнадзором) совместно с органами исполнительной власти субъектов Российской Федерации, осуществляющими государственное управление в сфере образования.

С целью подготовки учащихся к итоговой аттестации рекомендуется использовать «Открытый банк заданий ЕГЭ. Математика» и «Открытый банк заданий ОГЭ. Математика», созданные авторским коллективом ФИПИ: http://www.fipi.ru/.

Для проведения тематического и итогового контроля за качеством математической подготовки учащихся, необходимо использовать такие формы контроля знаний учащихся как задания с кратким ответом и задания с развернутым решением. Демонстрационные варианты по математике размещены на сайте ФИПИ: http://www.fipi.ru/. Диагностические и тренировочные работы по математике представлены на сайте СтатГрад: https://statgrad.org/.

# ЧАСТЬ I.
# ИТОГИ ЕГЭ ПО МАТЕМАТИКЕ (БАЗОВЫЙ УРОВЕНЬ) ВО ВЛАДИМИРСКОЙ ОБЛАСТИ В 2022 ГОДУ

## 1.1. Характеристика участников ЕГЭ по математике

1. Количество участников ЕГЭ по математике базового уровня

*Таблица 1*

| 2019 г. | | 2022 г. | |
|---|---|---|---|
| чел. | % от общего числа участников | чел. | % от общего числа участников |
| 2627 | 43,32 | 2747 | 50,52 |

2. Процентное соотношение юношей и девушек, участвующих в ЕГЭ

*Таблица 0*

| Пол | 2019 г. | | 2022 г. | |
|---|---|---|---|---|
| | чел. | % от общего числа участников | чел. | % от общего числа участников |
| Женский | 1777 | 67,64 | 1900 | 69,17 |
| Мужской | 850 | 32,36 | 847 | 30,83 |

3. Количество участников ЕГЭ в регионе по категориям

*Таблица 3*

| | |
|---|---|
| **Всего участников ЕГЭ по предмету** | **2747** |
| Из них:<br>ВТГ, обучающихся по программам СОО | 2712 |
| ВТГ, обучающихся по программам СПО | 0 |
| ВПЛ | 0 |
| участников с ограниченными возможностями здоровья | 35 |

4. Количество участников ЕГЭ по типам ОО

*Таблица 4*

| | |
|---|---|
| **Всего ВТГ** | **2747** |
| Из них:<br>выпускники гимназий | 233 |
| выпускники лицеев | 128 |
| выпускники СОШ | 2159 |
| выпускники СОШ с углубленным изучением отдельных предметов | 115 |
| выпускники кадетской школы-интерната | 4 |
| выпускники открытой (сменной) общеобразовательной школы | 108 |

5. Количество участников ЕГЭ по предмету по АТЕ региона

*Таблица 5*

| №п/п | АТЕ | Количество участников ЕГЭ по учебному предмету | % от общего числа участников в регионе |
|---|---|---|---|
| 1 | г.Владимир | 830 | 30,21 |
| 2 | г.Гусь-Хрустальный | 106 | 3,86 |
| 3 | г.Ковров | 255 | 9,28 |
| 4 | о.Муром | 255 | 9,28 |
| 5 | г.Радужный | 33 | 1,20 |
| 6 | Александровский район | 325 | 11,83 |
| 7 | Вязниковский район | 115 | 4,19 |
| 8 | Гороховецкий район | 33 | 1,20 |
| 9 | Гусь-Хрустальный район | 71 | 2,58 |
| 10 | Камешковский район | 34 | 1,24 |
| 11 | Киржачский район | 110 | 4,00 |
| 12 | Ковровский район | 25 | 0,91 |
| 13 | Кольчугинский район | 90 | 3,28 |
| 14 | Меленковский район | 74 | 2,69 |
| 15 | Муромский район | 26 | 0,95 |
| 16 | Петушинский район | 109 | 3,97 |
| 17 | Селивановский район | 22 | 0,80 |
| 18 | Собинский район | 67 | 2,44 |
| 19 | Судогодский район | 61 | 2,22 |
| 20 | Суздальский район | 68 | 2,48 |
| 21 | Юрьев-польский район | 38 | 1,38 |

**ВЫВОДЫ о характере изменения количества участников ЕГЭ по учебному предмету:**

В экзамене по математике базового уровня в 2022 году приняли участие 2747 чел., что составляет 50,5% от общего числа участников. Доля участников экзамена по сравнению с 2019 годом значительно возросла (в 2019 году – 43,3%). Лидируют в рейтинге участников, сдававших базовую математику, участники из крупных городов области – г. Владимир (30,2%), г. Ковров (9,3%), о. Муром (9,3%).

К числу муниципальных образований региона, в которых отмечается наименьшее количество участников ЕГЭ по базовой математике на протяжении нескольких лет, относятся Селивановский район (в 2019 – 0,7%, в 2022 году – 0,8%); Ковровский район (в 2019 году – 0,7%, в 2022 году – 0,9%).

По гендерному признаку по данным направлениям подготовки имеется значительное превышение количества девушек над юношами. Количество девушек, выбравших экзамен, более чем в 2 раза превышает количество юношей.

В 2022 году наблюдается незначительное снижение доли обучающихся с ограниченными возможностями здоровья: 2019 год – 1,5%; 2022 год – 1,3%.

Среди участников экзамена (ВТГ) преобладают выпускники средних общеобразовательных школ: в 2022 году количество таких участников составило 2159 чел. (78,6%) (в 2019 году – 2085 (79,4%)). Незначительно увеличился показатель доли выпускников гимназий и лицеев - 13,1% (в 2019 - 11,9%).

## 1.2. Основные результаты ЕГЭ по математике (базовый уровень)

1. Диаграмма распределения оценок участников ЕГЭ по предмету в 2022 г. *(количество участников, получивших тот или иной тестовый балл)*


2. Динамика результатов ЕГЭ по математике на базовом уровне

*Таблица 6*

| | Владимирская область | |
|---|---|---|
| | **2019** | **2022** |
| Не преодолели минимальный порог, чел./% | 60 (2,3%) | 43 (1,5%) |
| Средний балл (по пятибалльной шкале) | 4,14 | 4,24 |

3.Результаты по группам участников экзамена с различным уровнем подготовки:
А) в разрезе категорий участников ЕГЭ

*Таблица 7*

| **Участников, набравших балл** | **ВТГ, обучающиеся по программам СОО** | **Выпускники ОО, не завершившие среднее общее образование (не прошедший ГИА)** | **Обучающиеся ОО, завершивший освоение образовательной программы по учебному предмету** | **Участники ЕГЭ с ОВЗ** |
|---|---|---|---|---|
| Доля участников, получивших отметку «2» | 1,50 | 25,00 | 0,00 | 0,00 |
| Доля участников, получивших отметку «3» | 17,50 | 62,50 | 0,00 | 14,29 |
| Доля участников, получивших отметку «4» | 36,35 | 12,50 | 50,00 | 37,14 |
| Доля участников, получивших отметку «5» | 44,65 | 0,00 | 50,00 | 48,57 |
| Доля участников, получивших отметки «4» и «5» (качество обучения) | 81,00 | 12,50 | 100,00 | 85,71 |

| Участников, набравших балл | ВТГ, обучающиеся по программам СОО | Выпускники ОО, не завершившие среднее общее образование (не прошедший ГИА) | Обучающиеся ОО, завершивший освоение образовательной программы по учебному предмету | Участники ЕГЭ с ОВЗ |
|---|---|---|---|---|
| Доля участников, получивших отметки «3», «4» и «5» (уровень обученности) | 98,50 | 75,00 | 100,00 | 100,00 |

Б) в разрезе типа ОО

*Таблица 8*

| | Доля участников, получивших отметку | | | | Доля участников, получивших отметки «4» и «5» (качество обучения) | Доля участников, получивших отметки «3», «4» и «5» (уровень обученности) |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | **«2»** | **«3»** | **«4»** | **«5»** | | |
| СОШ | 0,7 | 12,7 | 34,1 | 52,5 | 80,6 | 98,5 |
| Лицеи, гимназии | 0,5 | 6,8 | 33,2 | 59,5 | 88,9 | 98,9 |
| Кадетская школа-интернат | 0,0 | 0,0 | 44,4 | 55,6 | 100,0 | 100,0 |
| Открытая (сменная) общеобразовательная школа | 1,99 | 31,3 | 41,8 | 24,9 | 57,4 | 96,3 |

В) основные результаты ЕГЭ по предмету в сравнении по АТЕ

*Таблица 9*

| № | Наименование АТЕ | Доля участников, получивших отметку | | | | Доля участников, получивших отметки «4» и «5» (качество обучения) | Доля участников, получивших отметки «3», «4» и «5» (уровень обученности) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | **«2»** | **«3»** | **«4»** | **«5»** | | |
| 1 | Александровский район | 0,31 | 24,92 | 42,77 | 32,00 | 74,77 | 99,69 |
| 2 | Вязниковский район | 1,74 | 19,13 | 32,17 | 46,96 | 79,13 | 98,26 |
| 3 | г.Владимир | 1,33 | 15,54 | 37,11 | 46,02 | 83,13 | 98,67 |
| 4 | г.Гусь-Хрустальный | 0,00 | 7,55 | 40,57 | 51,89 | 92,45 | 100,00 |
| 5 | г.Ковров | 2,35 | 9,02 | 35,29 | 53,33 | 88,63 | 97,65 |
| 6 | г.Радужный | 0,00 | 0,00 | 42,42 | 57,58 | 100,00 | 100,00 |
| 7 | Гороховецкий район | 6,06 | 15,15 | 45,45 | 33,33 | 78,79 | 93,94 |
| 8 | Гусь-Хрустальный район | 1,41 | 26,76 | 35,21 | 36,62 | 71,83 | 98,59 |

| № | Наименование АТЕ | Доля участников, получивших отметку | | | | Доля участников, получивших отметки «4» и «5» (качество обучения) | Доля участников, получивших отметки «3», «4» и «5» (уровень обученности) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | «2» | «3» | «4» | «5» | | |
| 9 | Камешковский район | 2,94 | 32,35 | 32,35 | 32,35 | 64,71 | 97,06 |
| 10 | Киржачский район | 1,82 | 17,27 | 32,73 | 48,18 | 80,91 | 98,18 |
| 11 | Ковровский район | 0,00 | 20,00 | 32,00 | 48,00 | 80,00 | 100,00 |
| 12 | Кольчугинский район | 0,00 | 7,78 | 26,67 | 65,56 | 92,22 | 100,00 |
| 13 | Меленковский район | 2,70 | 32,43 | 21,62 | 43,24 | 64,86 | 97,30 |
| 14 | Муромский район | 3,85 | 53,85 | 34,62 | 7,69 | 42,31 | 96,15 |
| 15 | о.Муром | 1,96 | 18,82 | 34,90 | 44,31 | 79,22 | 98,04 |
| 16 | Петушинский район | 0,92 | 22,02 | 34,86 | 42,20 | 77,06 | 99,08 |
| 17 | Селивановский район | 4,55 | 27,27 | 18,18 | 50,00 | 68,18 | 95,45 |
| 18 | Собинский район | 1,49 | 8,96 | 37,31 | 52,24 | 89,55 | 98,51 |
| 19 | Судогодский район | 4,92 | 24,59 | 34,43 | 36,07 | 70,49 | 95,08 |
| 20 | Суздальский район | 1,47 | 16,18 | 41,18 | 41,18 | 82,35 | 98,53 |
| 21 | Юрьев-Польский район | 5,26 | 18,42 | 44,74 | 31,58 | 76,32 | 94,74 |

**ВЫВОДЫ о характере изменения результатов ЕГЭ по математике на базовом уровне:**

Количество участников, не сдавших ЕГЭ по математике на базовом уровне в 2022 году (не преодолели минимального порога), снизилось по сравнению с 2019 годом на 0,8% (с 2,3% в 2019 году до 1,5% в 2022 году).

Средний балл выполнения заданий по математике на базовом уровне незначительно увеличился в сравнение с 2019 годом (от 4,14 в 2019 году до 4,24 в 2022 году).

## 1.3. Анализ типичных ошибок участников ЕГЭ по математике

КИМ по математике (базовый уровень) представляют собой набор заданий стандартизированной формы, которые соответствуют спецификации к демонстрационному варианту. Содержание КИМ определяется на основе федерального компонента государственного стандарта основного общего и среднего (полного) общего образования.

Варианты КИМ составлены на основе спецификации и кодификаторов проверяемых элементов содержания и требований к уровню подготовки выпускников общеобразовательных организаций

КИМ ЕГЭ 2022 года (базовый уровень) в сравнении с КИМ 2019 и 2018 г.г. (в 2020 и 2021 годах ЕГЭ базового уровня не проводились в связи с эпидемиологической обстановкой в России) претерпел ряд изменений, которые представлены в спецификации КИМ на сайте ФИПИ http://www.fipi.ru/.

Распределение заданий КИМ по содержанию, видам умений, уровню сложности и среднему проценту выполнения по региону, представлены в таблице 10:

*Таблица 10*

| № | Проверяемые элементы содержания/умения | Уровень сложности задания | Процент выполнения заданий | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | Средний % выполнения по всем вариантам, использованным в регионе | Группа не преодолевших Минимальный балл (%) | Группа от мин. балл-60 (%) | Группа 61-80 (%) | Группа 81-100 (%) | Средний % выполнения открытого варианта №301 |
| 1 | 1.1.1, 1.1.3,1.4.1<br>Уметь выполнять вычисления и преобразования | Б | **74** | 12 | 28 | 71 | 95 | 70 |
| 2 | 1.4.3 – 1.4.5<br>Уметь выполнять вычисления и преобразования | Б | **91** | 36 | 80 | 91 | 98 | 92 |
| 3 | 2.1.12, 6.3.1<br>Уметь использовать приобретённые знания и умения в практической деятельности и повседневной жизни | Б | **98** | 86 | 98 | 98 | 99 | 98 |
| 4 | 6.2.1. 3.1.3<br>Уметь использовать приобретённые знания и умения в практической деятельности и повседневной жизни | Б | **97** | 76 | 93 | 97 | 100 | 96 |
| 5 | 5.1.1 – 5.1.7,<br>5.5.1–5.5.5<br>Уметь выполнять действия с геометрическими фигурами | Б | **63** | 11 | 28 | 49 | 87 | 68 |
| 6 | 1.1.3<br>Уметь использовать приобретённые знания и умения в практической деятельности и повседневной жизни | Б | **78** | 7 | 40 | 75 | 95 | 82 |
| 7 | 1.4.1 – 1.4.2<br>Уметь выполнять вычисления и преобразования | Б | **76** | 4 | 32 | 73 | 96 | 77 |
| 8 | 6.2.1, 3.1.3<br>Уметь использовать приобретённые знания и умения в практической деятельности и повседневной жизни | Б | **89** | 18 | 64 | 93 | 98 | 88 |
| 9 | 2.1.1 – 2.1.6<br>Уметь решать уравнения и неравенства | Б | **75** | 11 | 32 | 72 | 96 | 75 |
| 10 | 5.1.1 – 5.1.3, 5.5.1, 5.5.3, 5.5.5<br>Уметь выполнять действия с геометрическими фигурами | Б | **90** | 26 | 71 | 92 | 98 | 91 |

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 11 | 6.3.1<br>Уметь строить и исследовать простейшие математические модели | Б | **78** | 3 | 35 | 78 | 96 | 71 |
| 12 | 1.4.1<br>Уметь строить и исследовать простейшие математические модели | Б | **89** | 49 | 76 | 89 | 96 | 97 |
| 13 | 5.3.1 – 5.3.5,<br>5.4.1 – 5.4.3,<br>5.5.5 – 5.5.7<br>Уметь выполнять действия с геометрическими фигурами | Б | **51** | 3 | 12 | 30 | 82 | 51 |
| 14 | 3.1.1–3.1.3,3.2.1, 3.2.5,3.2.6, 4.1.1,<br>4.1.2, 6.2.1<br>Уметь выполнять действия с функциями | Б | **94** | 62 | 85 | 95 | 99 | 97 |
| 15 | 5.1.1 – 5.1.5,<br>5.5.1, 5.5.3, 5.5.5<br>Уметь выполнять действия с геометрическими фигурами | Б | **71** | [illegible] | 20 | 66 | 95 | 69 |
| 16 | 5.3.1 – 5.3.3,<br>5.4.1 – 5.4.3,<br>5.5.5 - 5.5.7<br>Уметь выполнять действия с геометрическими фигурами | Б | **52** | 1 | 5 | 30 | 85 | 52 |
| 17 | 1.1.1 – 1.1.4, 1.4.2<br>Уметь выполнять вычисления и преобразования | Б | **77** | 18 | 38 | 73 | 96 | 82 |
| 18 | 2.1.12<br>Уметь строить и исследовать простейшие математические модели | Б | **96** | 61 | 89 | 97 | 99 | 99 |
| 19 | 1.4.1, 1.4.2<br>Уметь выполнять вычисления и преобразования | Б | **52** | 0 | 8 | 36 | 82 | 44 |
| 20 | 1.4.1, 1.4.2, 2.1<br>Уметь строить и исследовать простейшие математические модели | Б | **37** | 0 | 6 | 20 | 63 | 40 |
| 21 | 1.4.1, 1.4.2, 2.1, 2.2<br>Уметь строить и исследовать простейшие математические модели | Б | **11** | 1 | 1 | 4 | 20 | 10 |

Анализ заданий базового уровня с кратким ответом показывает, что выпускники достаточно успешно справились с заданиями 2, 3, 4, 8, 10, 12, 14, 18 (процент выполнения данных заданий по всем вариантам, используемых в регионе от 89% до 98% и по открытому варианту от 88% до 99%). Обучающиеся владеют базовыми алгоритмами, математическими понятиями, методами решения простейших текстовых задач (задание 2) и задач с практическим содержанием (задания 8,10,12), умеют читать и анализировать графики (задания 4 и 14), устанавливать соответствия между величинами и их возможными значениями (задание 3), выбирать верные утверждения при указанных условиях (задание 18).

Более 50% экзаменуемых справились с заданиями 1, 5, 6, 7, 9, 11, 13, 15,16, 17 (процент выполнения данных заданий по всем вариантам, используемых в регионе от 51% до 78% и по открытому варианту от 51% до 82%). При выполнении данных заданий выпускники продемонстрировали умение выполнять вычисление и преобразования (задания 1,7 и 17), умение выполнять действия с геометрическими фигурами (задания 5,13,15 и 16), умение использовать приобретённые знания и умения в практической деятельности и повседневной жизни (задание 6), умение строить и исследовать простейшие математические модели (задание 11).

Наибольшие затруднения возникли у обучающихся при выполнении заданий 19, 20, 21 (процент выполнения данных заданий по всем вариантам, используемых в регионе от 11% до 52% и по открытому варианту от 10% до 44%). Данные задания, связанные с умением строить и исследовать простейшие математические модели (задания 20 и 21), а также уметь выполнять вычисления и преобразования, используя свойства чисел, делимость, кратность, перебор, где необходимо учитывать совокупность всех условий для нахождения исходного числа (задание 19).

Анализ выполнения заданий с кратким ответом (1-11) проведен по проверяемым умениям открытого варианта на основании результатов, полученных экзаменуемыми в 2018, 2019, 2022 г.г. А также учитывались изменения в КИМ 2022 года как в содержании, так и в количестве заданий.

Задания 1, 2, 7, 17 и 19 проверяли умения выполнять вычисления и преобразования. В заданиях 1 и 7 необходимо найти значения выражения, в задании 2 - решить текстовую задачу, определив, сколько понадобится автобусов, чтобы за один раз перевезти всех детей и воспитателей из лагеря в город, в задании 17 – установить соответствие между указанными точками и числами, а в задании 19 – найти четырехзначное число, кратное 45, все цифры которого различны и четны.

**Процент выполнивших задание верно**

| Задание /Год | 2018 | 2019 | 2022 |
|---|---|---|---|
| **Задание 1** | 88% | 85% | 70% |
| **Задание 2** | 69% | 89% | 92% |
| **Задание 7** | 78% | 83% | 77% |
| **Задание 17** | 60% | 71% | 82% |
| **Задание 19** | 75% | 69% | 44% |

*Примечание:* задания 1, 17 и 19 соответствуют КИМ прошлых лет, задание 2 (2022 г.) аналогично заданию 3 (2018, 2019 г.г.), задание 7 (2022 г.) аналогично заданию 2 (2018, 2019 г.г.).

Анализ выполнения заданий показывает, что прослеживается положительная динамика при выполнении задания 2 (решение текстовой задачи) от 69% до 92% и задания 17 (установления соответствия) от 60% до 82%. Результат выполнения заданий 1 и 19 оказался существенно ниже с предыдущими годами. При решении задания 1, обучающиеся допускали ошибки при выполнении действий с обыкновенными дробями и десятичными дробями; а при выполнении задания 19 допускали ошибки в преобразовании выражения, включающих арифметические операции, а также и вычислительные ошибки.

Задания 3, 4, 6 и 8 проверяли умения использовать приобретённые знания и умения в практической деятельности и повседневной жизни.

**Процент выполнивших задание верно**

| Задание /Год | 2018 | 2019 | 2022 |
|---|---|---|---|
| **Задание 3** | 90% | 97% | 98% |
| **Задание 4** | 98% | 97% | 96% |
| **Задание 6** | 79% | 63% | 82% |
| **Задание 8** | 93% | 93% | 88% |

*Примечание*: задание 3 (2022 г.) аналогично заданию 9 КИМ прошлых лет; задание 4 аналогично заданию 11 КИМ прошлых лет; задание 6 аналогично 10 КИМ прошлых лет; задание 8 аналогично заданию 4 КИМ прошлых лет.

Анализ выполнения заданий показывает, что прослеживается положительная динамика при выполнении задания 3 (установление соответствия между величинами и их возможными значениями) от 90% до 98% и задания 6 (текстовая задача) от 63% до 82%. Стабильный результат выполнения задания 4 (работа с рисунком) от 98% до 96%. Ниже оказался результат выполнения задания 8 (работа с формулой) от 93% до 88%.

При выполнении данного типа заданий допускались ошибки в первую очередь связаны с невнимательным чтением условия задач, а также вычислительные ошибки. В задании 3 ошибки в подборе соответствующих элементов; в задании 4 ошибки при работе с рисунком по определению суточного количества осадков за данный период, в задании 6 ошибки в нахождении процента от числа; при решении задания 8, экзаменуемые допускали ошибки в преобразовании буквенного выражения.

Задания 5, 10, 13, 15 и 16 проверяли умения выполнять действия с геометрическими фигурами.

**Процент выполнивших задание верно**

| Задание /Год | 2018 | 2019 | 2022 |
|---|---|---|---|
| Задание 5 | - | - | 68% |
| Задание 10 | 81% | 76% | 91% |
| Задание 13 | 45% | 32% | 51% |
| Задание 15 | 69% | 48% | 69% |
| Задание 16 | 48% | 67% | 52% |

*Примечание*: задание 10 аналогично заданию 8 КИМ прошлых лет; задания 13, 15 и 16 соответствуют аналогичным заданиям прошлых лет; в КИМ 2022 года добавлено новое задание 5.

Анализ выполнения заданий показывает, что прослеживается положительная динамика при выполнении заданий 10 (от 76 % до 91%) и 13 (от 32% до 51%). Стабильным является выполнения задания 15 (69% верно выполнивших). Ниже оказался результат выполнения стереометрической задачи 16 (в сравнение с 2019 г. результат оказался ниже на 15%).

Типичные ошибки при выполнении геометрических заданий связаны с вычислительными ошибками, а также невнимательным чтением условия задач и работы с рисунками (задания 10 и 15), неумением находить площадь треугольника, используя клетчатую бумагу (задание 5), незнанием формулы объема цилиндра (задание 13) и объема призмы (задание 16).

Задания 11, 12, 18, 20 и 21 проверяли умения строить и исследовать простейшие математические модели.

**Процент выполнивших задание верно**

| Задание /Год | 2018 | 2019 | 2022 |
|---|---|---|---|
| Задание 11 | 79% | 63% | 71% |
| Задание 12 | 97% | 96% | 97% |
| Задание 18 | 71% | 75% | 99% |
| Задание 20 | - | - | 40% |
| Задание 21 | 15% | 21% | 10% |

*Примечание*: задание 11 в 2022 г. аналогично заданию 10 КИМ прошлых лет; задания 12 и 18 соответствуют аналогичным заданиям прошлых лет; в КИМ 2022 года добавлено новое задание 20, а задание 21 КИМ 2022 г. аналогично заданию 20 КИМ прошлых лет.

Анализ выполнения заданий показывает, что прослеживается положительная динамика при выполнении задания 18 (выбор верного утверждения) от 71 % до 99%. Стабильным является выполнения задания 12 (96% - 97% верно выполнивших данное задание). Ниже оказался результат выполнения задания 21, только 10 % верно определили сколько строк в таблице.

Задание 11 (нахождение вероятности события) верно выполнили 71%, что выше чем в 2019 г. (63%), однако ниже результата 2018 г. (79%). Ошибки в неверном применении формулы для вычисления вероятности события.

Новое задание № 20 (текстовая задача на движения) выполнило 40% экзаменуемых. Допускались ошибки в построении математической модели по условию задачи, в анализе условий данной задачи, в выборе и записи ответа.

Задание 9 проверяло умение решать уравнения или неравенства.

**Процент выполнивших задание верно**

| **Задание /Год** | **2018** | **2019** | **2022** |
|---|---|---|---|
| **Задание 9** | 84% | 53% | 75% |

*Примечание*: задание 9 в 2022 г. аналогично заданию 7 КИМ прошлых лет.

Анализ выполнения данного задания показывает, что 75% выпускников справились с решением квадратного уравнения. Результат 2022 года стал выше результата 2019 года на 22% и ниже результата 2018 года тоже на 9%. Ошибки связаны с незнанием алгоритма решения квадратного уравнения, вынесением общего множителя за скобки, а также вычислительными ошибками. Те экзаменуемые, кто верно определил корни квадратного уравнения, но не смог верно записать ответ, где требовалось указать больший из них.

Задание 14 проверяло умение выполнять действия с функциями.

**Процент выполнивших задание верно**

| **Задание /Год** | **2018** | **2019** | **2022** |
|---|---|---|---|
| **Задание 14** | 56% | 88% | 97% |

*Примечание*: задание 14 в 2022 г. аналогично заданию КИМ прошлых лет.

Анализ выполнения заданий показывает, что прослеживается положительная динамика при выполнении задания 14 от 56% в 2018 году до 975в 2022 году. Результат оказался значительно выше прошлых лет. Выпускники верно поставили в соответствие каждому интервалу времени характеристику температуры на данном интервале. Три процента экзаменуемых допустили ошибки в определении соответствия каждого интервала (ошибки в чтении графика) или неверно указали в таблице под каждой буквой соответствующий номер.

Таким образом, результаты экзаменационной работы на базовом уровне выявили проблемы:

– недостаточно сформированы у выпускников вычислительные навыки;
– недостаточная подготовка по геометрии: незнание основных формул, теорем, что не позволяет решать задачи с геометрическим содержанием;
– невнимательное чтение текста задания или непонимание смысла вопроса задачи, в результате чего задача решается формально;
– неумение в составлении математической модели по тексту задачи. Ошибки при выполнении текстовых задач – неправильная организация первичного восприятия выпускниками условия задачи и ее анализа, которые проводятся без должной опоры на жизненную ситуацию, отраженную в задаче, без ее предметного или графического моделирования.

Следует отметить, что перечисленные выше проблемы, встречаются довольно часто, поэтому необходимо уделять больше внимания на развитие вычислительных навыков, навыков составления математических моделей по тексту задачи и обратить особое внимание на подготовку по геометрии и теоретическую и практическую. Причем совершенствовать эти навыки постоянно, и при занятиях по предмету, и в период подготовки к ЕГЭ.

**ВЫВОДЫ об итогах анализа выполнения заданий, групп заданий:**

*Перечень* элементов умений, усвоенных в процессе обучения, выпускниками региона в целом можно считать **достаточным на базовом уровне**.

– уметь использовать приобретенные знания и умения в практической деятельности и повседневной жизни;
– уметь строить и исследовать простейшие математические модели;
– уметь решать уравнения и неравенства.

Анализ выполнения заданий показывает, что прослеживается положительная динамика при выполнении заданий, которые проверяли умения использовать приобретенные знания и умения в практической деятельности и повседневной жизни (установление соответствия между величинами и их возможными значениями от 90% до 98%; решение текстовых задач на проценты от 63% до 82%; стабильный результат выполнения задания при чтении чертежа, рисунка для определения искомых величин от 98% до 96%; решение задач физического содержания (работа с формулой) от 88% до 93%). Результат выполнения данного рода заданий демонстрируют положительную динамику овладения базовыми умениями необходимыми при решении практико-ориентированных заданий.

Перечень элементов умений, усвоение которых школьниками региона в целом **нельзя считать достаточным на базовом уровне**:

– уметь выполнять действия с геометрическими фигурами.
– уметь выполнять действия с функциями.

Следует отметить низкий процент выполнения геометрический заданий, что свидетельствует о сохраняющихся системных недостатках в преподавании геометрии в основной школе и недостаточном уровне формирования умения выполнять действия с геометрическими фигурами. Также причиной является рассмотрение лишь тех типов задач, которые встречались на экзамене в предыдущие годы, вместо полноценного изучения геометрии. Как показывает анализ работ и допущенных ошибок, для успешного решения геометрических задач необходима не только хорошая математическая подготовка, но и умение логически рассуждать и четко излагать свои мысли. Следует рекомендовать, помимо решения задач из открытого банка ЕГЭ, включать в процесс обучения: задачи, требующие видения геометрических фигур; задачи, развивающие геометрическую интуицию; больше уделять внимания содержательным геометрическим задачам, развивающим видение геометрических конструкций, требующим четкого изложения доказательства и применения вычислительных навыков.

КИМ ЕГЭ 2022 года (базовый уровень) в сравнении с КИМ прошлых лет содержал ряд изменений, которые представлены в спецификации КИМ на сайте ФИПИ http://www.fipi.ru/.

Анализ результатов выполнения заданий ЕГЭ 2022 г. по математике (базовый уровень) обучающимися Владимирского региона показывает, что использованные КИМы в целом соответствуют целям проведения экзамена, позволяют дифференцировать выпускников с различной мотивацией и уровнем подготовки по ключевым разделам курса математики.

## 1.4. Рекомендации по совершенствованию организации и методики преподавания математики на основе выявленных типичных затруднений и ошибок ЕГЭ (базовый уровень)

Результаты экзамена по математике на базовом уровне позволили выявить ряд проблем, которые необходимо учитывать при обучении математике и подготовке обучающихся к итоговой аттестации в формате ЕГЭ.

Важным условием успешной подготовки к экзамену является тщательность в отслеживании результатов учеников по всем темам и в своевременной коррекции уровня усвоения учебного материала. Одним из принципов построения методической подготовки к итоговой аттестации считается принцип «жесткого ограничения времени» при выполнении заданий с кратким ответом. В целях эффективного использования времени на экзамене, нужно также учить школьников приемам быстрого и рационального счета. А также формирование читательской грамотности при работе с текстом как основной составляющей функциональной грамотности обучающихся: работа с рисунками, схемами, графиками, текстом, применении знаний на практике. Уделять внимание обучению работы с вопросами, вычленению ключевых теорий, на базе которых строятся ответы.

При формировании методологических понятий необходимо раскрывать структуру научной теории, ее объект и предмет, основание, следствия и границы применимости.

Низкий процент выполнения геометрических заданий, свидетельствует о сохраняющихся системных недостатках в преподавании геометрии в основной школе. Также причиной является рассмотрение лишь тех типов задач, которые встречались на экзамене в предыдущие годы, вместо полноценного изучения геометрии. Таким образом, следует рекомендовать при подготовке к экзамену особое внимание уделить формированию и развитию умений выполнять действия с геометрическими фигурами, предлагать задания с разными числовыми данными по одному рисунку, предлагать задания где необходимо определять различные элементы фигуры и/или вычислить их числовые характеристики, уделять больше внимания развитию умения верно пользоваться геометрическим чертежом, добиваться достаточного уровня владением теоретическим материалом.

При подготовке к экзамену особое внимание уделять решению задач, в которых необходимо составить математическую модель в виде уравнения или системы уравнений. Не менее важно отрабатывать навыки решения различных типов уравнений, встречающихся при решении подобного вида задач.

При подготовке к экзамену учить школьников в полном объёме исследованию функции с помощью производной.

Анализируя результаты выпускников, следует рекомендовать при подготовке к экзамену обратить внимание: на корректное выполнение всех преобразований необходимых при решении заданий; на формирование математической культуры при решении задач, требующих доказательства или обоснования доказываемого утверждения или факта. Также рекомендуется обратить внимание на соответствующую подготовку учителей, которые осуществляют обучение учащихся старших классов.

Одним из условий успешного обучения математике является правильный выбор учебника математики, при этом следует руководствоваться приказами Министерства Просвещения РФ «Об утверждении федерального перечня учебников, рекомендуемых к использованию при реализации имеющих государственную аккредитацию образовательных программ начального общего, основного общего, среднего общего образования»: № 254 от 20 мая 2020г. и № 766 от 23.12.2020. При выборе УМК следует обратить внимание на преемственность в обучении математике в курсах начальной, основной и старшей школы.

В сложившихся условиях (дистанционное обучение, онлайн обучение) рекомендуется использовать возможности сетевого взаимодействия с обучающимися, организовать изучение тем и итоговое повторение на основе интерактивных уроков, используя образовательные платформы (https://эдо.образование33.рф и др.).

На основании вышеизложенного, **рекомендуем** педагогам проанализировать результаты государственной итоговой аттестации по математике на заседаниях городских (районных) методических объединений учителей математики; планировать работу на 2022-2023 учебный год с учетом:

- изучения нормативных документов Министерства Просвещения РФ, методических писем и рекомендаций ФИПИ http://www.fipi.ru/. В данных письмах и рекомендациях указаны нормативные требования к проведению ЕГЭ, характеристика контрольных измерительных материалов по математике, рекомендации по использованию и интерпретации результатов выполнения экзаменационных работ;
- использования «Открытый банк заданий ЕГЭ. Математика», созданного авторским коллективом ФИПИ с целью подготовки учащихся к итоговой аттестации http://www.fipi.ru/;
- использование банка заданий по формированию математической грамотности ИСРО РАО http://skiv.instrao.ru/bank-zadaniy/matematicheskaya-gramotnost/;
- выявление проблемных тем теоретического материала по математики за курс основной и старшей школы; организация индивидуальных и групповых занятий по восполнению пробелов в знаниях отдельных теоретических вопросов курса математики, на занятиях спецкурсов, консультациях продолжить отработку навыков практического применения теории; на уроках повторения пройденного материала уделить особое внимание вопросам и заданиям, вызвавшим затруднения у школьников;
- закрепление навыков смыслового чтения и анализа текста заданий (типа 2,3,4,6,8), т.к. у обучающихся недостаточно сформированы как читательская грамотность, так и умения использовать приобретённые знаний в практической деятельности и повседневной жизни;
- усиление внимания к геометрическим задачам на решение и доказательство; необходимо обратить самое внимание на изучение геометрии непосредственно с 7 класса, когда начинается систематическое изучение этого предмета. Подготовку выпускников следует начинать не с рассмотрения примеров решения геометрических задач вариантов ЕГЭ, а с изучения свойств геометрических фигур и их элементов. Задачи необходимо решать по темам, например, «Треугольник и его элементы» и т.д.;
- проведение анализа условия задачи, искать пути решения, применять известные алгоритмы в измененной ситуации (стандартные методы решения простейших уравнений и неравенств, преобразование алгебраических выражений, свойства геометрических фигур при решении планиметрических и стереометрических задач);
- усиление работы по повышению уровня вычислительных навыков учащихся (например, с помощью устной работы на уроках: применение арифметических законов действий при работе с рациональными числами, свойства степеней, корней и др.), что позволит им успешно выполнить задания, избежав досадных ошибок, применяя рациональные методы вычислений;
- повышение мотивации учащихся к самостоятельному изучению дополнительного материала;
- отработка у обучающихся быстрого и правильного выполнения заданий КИМ, постоянного контроля умений, необходимых для выполнения заданий базового уровня.

Одним из условий, влияющим на успешную подготовку к ЕГЭ по математике на базовом уровне, является реализация индивидуального подход в работе с учеником, планирующим сдавать экзамен. Для этого может быть использован график, который отражает порядок прохождения тем и результаты усвоения изученного материала, в том числе и выполнения заданий.

Согласно ФГОС СОО, должны быть достигнуты не только предметные, но и метапредметные результаты обучения, в том числе способность и готовность к самостоятельному поиску методов решения практических задач.

Достижения этих результатов влияет на успешность выполнения заданий КИМ по математике базовом уровне. Например, задание 6 - решение прикладной математической, экономический задачи, при решении которой необходимо построить математическую модель конкретной ситуации и провести ее исследование. В этом задании усилена сюжетная, практико-ориентированная составляющая условия:

*Налог на доходы составляет 13% от заработной платы. Заработная плата Ивана Кузьмича равна 20000 руб. Какую сумму он получит после уплаты налога на доходы?*

При выполнении практико-ориентированных задач, затруднения у обучающихся вызывают: способность моделировать, анализировать и преобразовывать информацию, интерпретировать полученные результаты.

Следовательно, учителю необходимо формировать у обучающихся опыт поиска путей решения жизненных задач, учить математическому моделированию реальных ситуаций и переносить способы решения учебных задач на реальные объекты. В каждой теме в соответствии с кодификатором содержания выполнять задания, построенные на реальных жизненных сюжетах. Акцент – на обсуждение: обсуждение ситуации, выявление математических аспектов, перевод на язык математики, обсуждение ограничений, допущений, различные способы решения, обсуждение их рациональности; обсуждение результатов: оценка и интерпретация, соотнесение с ситуацией.

# ЧАСТЬ II.
# ИТОГИ ЕГЭ ПО МАТЕМАТИКЕ (ПРОФИЛЬНЫЙ УРОВЕНЬ) ВО ВЛАДИМИРСКОЙ ОБЛАСТИ В 2022 ГОДУ

## 2.1. Характеристика участников ЕГЭ по математике

1. **Количество участников ЕГЭ по учебному предмету (за 3 года)**

*Таблица 1*

| 2020 г. | | 2021 г. | | 2022 г. | |
|---|---|---|---|---|---|
| чел. | % от общего числа участников | чел. | % от общего числа участников | чел. | % от общего числа участников |
| 2897 | 54,05 | 3020 | 53,16 | 2425 | 44,62 |

1. **Процентное соотношение юношей и девушек, участвующих в ЕГЭ**

*Таблица 0*

| Пол | 2020 г. | | 2021 г. | | 2022 г. | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | чел. | % от общего числа участников | чел. | % от общего числа участников | чел. | % от общего числа участников |
| Женский | 1282 | 44,3 | 1378 | 45,63 | 1058 | 43,63 |
| Мужской | 1615 | 55,7 | 1642 | 54,37 | 1367 | 56,37 |

2. **Количество участников ЕГЭ в регионе по категориям**

*Таблица 3*

| **Всего участников ЕГЭ по предмету** | **2425** |
|---|---|
| Из них:<br>– ВТГ, обучающихся по программам СОО | 2300 |
| – ВТГ, обучающихся по программам СПО | 53 |
| – ВПЛ | 72 |
| – участников с ограниченными возможностями здоровья | 25 |

3. **Количество участников ЕГЭ по типам ОО**

*Таблица 4*

| **Всего ВТГ** | **2300** |
|---|---|
| Из них:<br>– выпускники гимназий | 239 |
| – выпускники лицеев | 163 |
| – выпускники СОШ | 1734 |
| – выпускники СОШ с углубленным изучением отдельных предметов | 144 |
| – выпускники кадетской школы-интерната | 13 |
| – выпускники открытой (сменной) общеобразовательной школы | 7 |

4. **Количество участников ЕГЭ по предмету по АТЕ региона**

*Таблица 5*

| № п/п | АТЕ | Количество участников ЕГЭ по учебному предмету | % от общего числа участников в регионе |
|---|---|---|---|
| 1. | г.Владимир | 834 | 34,39 |
| 2. | г.Гусь-Хрустальный | 136 | 5,61 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 3. | г.Ковров | 375 | 15,46 |
| 4. | о.Муром | 264 | 10,89 |
| 5. | г.Радужный | 44 | 1,81 |
| 6. | Александровский район | 152 | 6,27 |
| 7. | Вязниковский район | 64 | 2,64 |
| 8. | Гороховецкий район | 14 | 0,58 |
| 9. | Гусь-Хрустальный район | 44 | 1,81 |
| 10. | Камешковский район | 26 | 1,07 |
| 11. | Киржачский район | 71 | 2,93 |
| 12. | Ковровский район | 29 | 1,20 |
| 13. | Кольчугинский район | 78 | 3,22 |
| 14. | Меленковский район | 47 | 1,94 |
| 15. | Муромский район | 8 | 0,33 |
| 16. | Петушинский район | 81 | 3,34 |
| 17. | Селивановский район | 11 | 0,45 |
| 18. | Собинский район | 69 | 2,85 |
| 19. | Судогодский район | 29 | 1,20 |
| 20. | Суздальский район | 39 | 1,61 |
| 21. | Юрьев-польский район | 10 | 0,41 |

**5. Основные учебники по предмету из федерального перечня Минпросвещения России, которые использовались в ОО субъекта Российской Федерации в 2021-2022 учебном году**

*Таблица 6*

| № п / п | Название учебников ФПУ | Примерный процент ОО, в которых использовался учебник / другие пособия |
|---|---|---|
| 1 | Алимов Ш.А., Колягин Ю.М., Ткачева М.В. и др. Математика: алгебра и начала анализа, геометрия. Алгебра и начала анализа-10-11. АО «Издательство «Просвещение» | 19 |
| 2 | Колягин Ю.М., Ткачева М.В., Федорова Н.Е. и др. Математика: алгебра и начала анализа, геометрия. Алгебра и начала анализа-11. АО «Издательство «Просвещение» | 5 |
| 3 | Мордкович А.Г., Семенов П.В. Математика: алгебра и начала анализа, геометрия. Алгебра и начала анализа-10-11 (в 2-х частях). ООО «ИОЦ МНЕМОЗИНА» | 55 |
| 4 | Никольский С.М., Потапов М.К., Решетников Н.Н. и др. Математика: алгебра и начала анализа, геометрия. Алгебра и начала анализа-11. АО «Издательство «Просвещение» | 9 |
| 5 | Мерзляк А.Г., Номировский Д.А., Полонский В.Б., Якир М.С. Математика. Алгебра и начала анализа-11. ООО Издательский центр «ВЕНТАНА_ГРАФ» | 12 |
| 6 | Мерзляк А.Г., Номировский Д.А., Полонский В.Б., Якир М.С. Математика. Геометрия -11. ООО Издательский центр «ВЕНТАНА_ГРАФ» | 7 |
| 7 | Атанасян Л.С., Бутузов В.Ф., Кадомцев С.Б. и др. Математика: алгебра и начала анализа, геометрия. Геометрия - 10-11. АО «Издательство «Просвещение» | 90 |
| 8 | Погорелов А.В. Математика: алгебра и начала анализа, геометрия. Геометрия 10-11. АО «Издательство «Просвещение» | 3 |

## ВЫВОДЫ о характере изменения количества участников ЕГЭ по математике (профильный уровень)

В ЕГЭ по математике профильного уровня в 2022 году приняли участие 2425 чел., что составляет 44,6% от общего числа участников. Доля участников экзамена по сравнению с 2021 годом значительно снизилась (в 2021 году – 53,1%). Лидируют в рейтинге участников, сдававших профильную математику, участники из крупных городов области – г. Владимир (34,4%), г. Ковров (15,5%), о. Муром (10,9%).

К числу муниципальных образований региона, в которых отмечается наименьшее количество участников ЕГЭ по математике на протяжении нескольких лет, относятся Муромский район (в 2021 – 10 (0,33%), в 2022 году – 8 (0,3%)); Селивановский район (в 2021 году – 18 (0,6%), в 2022 году – 11 (0,5%)).

По гендерному признаку по данным направлениям подготовки имеется незначительное превышение количества юношей над девушками. Количество юношей, выбравших экзамен в 1,3 раза превышает количество девушек и в % отношении незначительно снизилось по отношении к двум предыдущим годам.

В 2022 году, как и в предыдущие годы, большую часть из участников экзамена составляют выпускники текущего года, выпускники прошлых лет. Выпускников текущего года суммарно 2353 человек (97,0%) (2021 – 2883 (95,5%)). В 2022 году произошло незначительное увеличение количества ВТГ, обучающихся по программам СПО: в 2021 году – 41 (1,3 %), в 2022 году – 53 чел. (2,2%), В 2022 году наблюдается незначительное увеличение доли обучающихся с ограниченными возможностями здоровья: 2021 год – 0,8%; 2022 год – 1,0%.

Среди участников экзамена (ВТГ) преобладают выпускники средних общеобразовательных школ: в 2022 году количество таких участников составило 1734 человек (75,4%) (в 2021 году – 2229 (78,4%)).

Таким образом, на основании количественной характеристики состава участников ЕГЭ по математике профильного уровня во Владимирской области, можно сделать вывод о том, что общая отрицательная динамика количественных показателей в 2022 году существенно не отличается от предыдущих лет. Изменение числа участников ЕГЭ по АТЕ происходит, в основном, под влиянием демографической ситуации.

## 2.2. Основные результаты ЕГЭ по математике (профильный уровень)

1. **Диаграмма распределения тестовых баллов участников ЕГЭ по предмету в 2022 г.** *(количество участников, получивших тот или иной тестовый балл)*


1. **Динамика результатов ЕГЭ по предмету за последние 3 года**

*Таблица 7*

| № п/п | Участников, набравших балл | Владимирская область 2020 г. | 2021 г. | 2022 г. |
|---|---|---|---|---|
| 1. | ниже минимального балла[1], % | 7,59 | 6,23 | 2,97 |
| 2. | от 61 до 80 баллов, % | 44,15 | 39,21 | 50,56 |
| 3. | от 81 до 99 баллов, % | 4,94 | 8,05 | 3,67 |
| 4. | 100 баллов, чел. | 1 | 2 | 0 |
| 5. | Средний тестовый балл | 55,26 | 55,99 | 58,49 |

2. **Результаты по группам участников экзамена с различным уровнем подготовки:**

А) в разрезе категорий участников ЕГЭ

*Таблица 8*

| № п/п | Участников, набравших балл | ВТГ, обучающиеся по программам СОО | ВТГ, обучающиеся по программам СПО | Выпускник общеобразовательной организации, не завершивший среднее общее образование (не прошедший ГИА) | ВПЛ | Участники ЕГЭ с ОВЗ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1. | Доля участников, набравших балл ниже минимального | 0,91 | 50,94 | 0,00 | 33,33 | 4,00 |

[1]Здесь и далее минимальный балл - минимальное количество баллов ЕГЭ, подтверждающее освоение образовательной программы среднего общего образования (для учебного предмета «русский язык» минимальный балл - 24)

| № п/п | Участников, набравших балл | ВТГ, обучающиеся по программам СОО | ВТГ, обучающиеся по программам СПО | Выпускник общеобразовательной организации, не завершивший среднее общее образование (не прошедший ГИА) | ВПЛ | Участники ЕГЭ с ОВЗ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 2. | Доля участников, получивших тестовый балл от минимального балла до 60 баллов | 42,85 | 37,74 | 100,00 | 44,44 | 48,00 |
| 3. | Доля участников, получивших от 61 до 80 баллов | 52,37 | 11,32 | 0,00 | 22,22 | 40,00 |
| 4. | Доля участников, получивших от 81 до 99 баллов | 3,87 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 8,00 |
| 5. | Количество участников, получивших 100 баллов | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

Б) в разрезе типа ОО

*Таблица 9*

| | Доля участников, получивших тестовый балл | | | | Количество участников, получивших 100 баллов |
|---|---|---|---|---|---|
| | ниже минимального | от минимального до 60 баллов | от 61 до 80 баллов | от 81 до 99 баллов | |
| СОШ | 1,01 | 44,95 | 50,59 | 3,46 | 0 |
| Лицеи, гимназии | 0,25 | 31,76 | 61,79 | 6,2 | 0 |
| Кадетская школа-интернат | 0 | 69,23 | 30,77 | 0 | 0 |
| Открытая (сменная) общеобразовательная школа | 16,67 | 66,67 | 16,67 | 0 | 0 |

В) основные результаты ЕГЭ по математике профильного уровня в сравнении по АТЕ

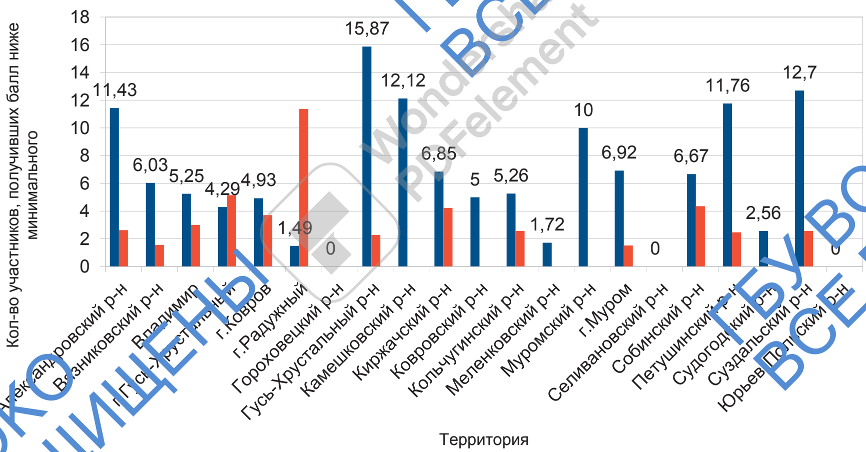
*Таблица 10*

| № | Наименование АТЕ | Доля участников, получивших тестовый балл | | | | Количество участников, получивших 100 баллов |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | ниже минимального | от минимального до 60 баллов | от 61 до 80 баллов | от 81 до 99 баллов | |
| 1 | Александровский район | 2,63 | 46,71 | 48,03 | 2,63 | 0 |
| 2 | Вязниковский район | 1,56 | 39,06 | 59,38 | 0,00 | 0 |
| 3 | г.Владимир | 3,00 | 38,73 | 54,80 | 3,48 | 0 |
| 4 | г.Гусь-Хрустальный | 5,15 | 30,15 | 52,94 | 11,76 | 0 |
| 5 | г.Ковров | 3,71 | 41,64 | 50,93 | 3,71 | 0 |
| 6 | г.Радужный | 11,36 | 43,18 | 40,91 | 4,55 | 0 |
| 7 | Гороховецкий район | 0,00 | 50,00 | 35,71 | 14,29 | 0 |
| 8 | Гусь-Хрустальный район | 2,27 | 52,27 | 45,45 | 0,00 | 0 |
| 9 | Камешковский район | 0,00 | 42,31 | 57,69 | 0,00 | 0 |
| 10 | Киржачский район | 4,23 | 49,30 | 43,66 | 2,82 | 0 |
| 11 | Ковровский район | 0,00 | 68,97 | 24,14 | 6,90 | 0 |

| № | Наименование АТЕ | Доля участников, получивших тестовый балл | | | | Количество участников, получивших 100 баллов |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | ниже минимального | от минимального до 60 баллов | от 61 до 80 баллов | от 81 до 99 баллов | |
| 12 | Кольчугинский район | 2,56 | 50,00 | 46,15 | 1,28 | 0 |
| 13 | Меленковский район | 0,00 | 63,83 | 34,04 | 2,13 | 0 |
| 14 | Муромский район | 0,00 | 50,00 | 50,00 | 0,00 | 0 |
| 15 | г.Муром | 1,52 | 42,42 | 51,52 | 4,55 | 0 |
| 16 | Петушинский район | 2,47 | 48,15 | 45,68 | 3,70 | 0 |
| 17 | Селивановский район | 0,00 | 45,45 | 45,45 | 9,09 | 0 |
| 18 | Собинский район | 4,35 | 46,38 | 49,28 | 0,00 | 0 |
| 19 | Судогодский район | 0,00 | 58,62 | 41,38 | 0,00 | 0 |
| 20 | Суздальский район | 2,56 | 61,54 | 35,90 | 0,00 | 0 |
| 21 | Юрьев-польский район | 0,00 | 50,00 | 50,00 | 0,00 | 0 |

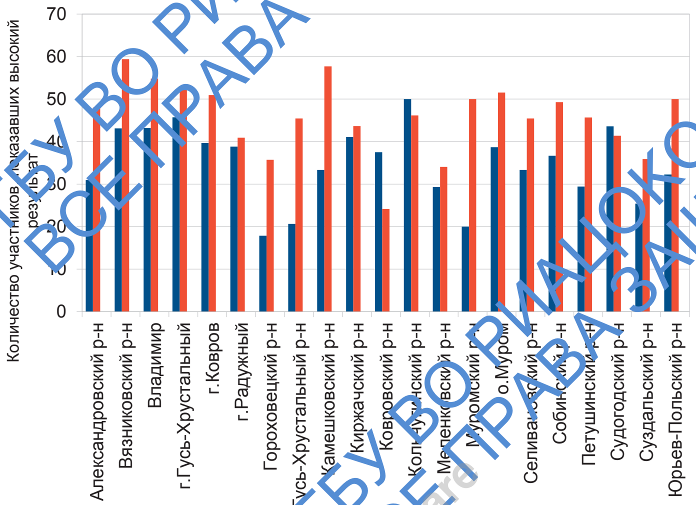
**ВЫВОДЫ о характере изменения результатов ЕГЭ по математике (профильный уровень):**

Количество участников, получивших балл ниже минимального (сравнительные результаты за 2021 и 2022 г.г.)




Сравнительный анализ количества участников, получивших балл ниже минимального, по результатам ЕГЭ в 2021 и 2022 г.г. показывает положительную динамику практически во всех территориальных единицах области. Наиболее значимые изменения в Александровском, Гусь-Хрустальном, Камешковском, Муромском, Петушинском и Суздальском районах. Стабильные результаты показывают Гороховецкий, Селивановский, Юрьев-Польский районы. Эти результаты можно аргументировать постоянной работой педагогов по совершенствованию методики подготовки учащихся к ГИА, посещением курсов повышения квалификации по проблемам подготовки учащихся, участием в вебинарах, круглых столах, качественной работой методических объединений.

Количество участников, показавших высокий результат (тестовый балл от 61 до 80)




Сравнительный анализ количества участников, получивших тестовый балл от 61 до 80, показывает, что практически во всех территориях данный показатель увеличился. Можно сделать вывод, что педагоги стали больше уделять внимания работе с одаренными учениками, используя при этом учебно-методические комплекты для профильного уровня.

Наиболее высокий уровень по предмету на протяжении 2021 и 2022 г.г. показывают:

1. МАОУ СОШ № 25 г. Владимира
2. МБОУ СОШ № 15 г. Гусь-Хрустального
3. МБОУ СОШ № 19 г. Коврова
4. МАОУ ПКЛ г. Владимира
5. МБОУ Лицей № 1 о. Мурома
6. МАОУ Лингвистическая гимназия 23 г. Владимира
7. МБОУ СОШ № 46 г. Владимира
8. МБОУ СОШ № 8 г. Владимира
9. МБОУ СОШ № 22 г. Коврова
10. МБОУ СОШ № 2 ЗАТО г. Радужный

## 2.3. Анализ типичных ошибок участников ЕГЭ по математике (профильный уровень)

Контрольно-измерительные материалы (КИМ) единого государственного экзамена по математике (профильный уровень) содержал набор заданий стандартизированной формы, которые соответствуют демонстрационному варианту 2022 года. Содержание КИМ определяется на основе федерального компонента государственного стандарта основного общего и среднего (полного) общего образования.

Варианты КИМ составлены на основе спецификации и кодификаторов проверяемых элементов содержания и требований к уровню подготовки выпускников общеобразовательных организаций

КИМ ЕГЭ 2022 года (профильный уровень) в сравнении с КИМ 2021 года также содержит ряд изменений, которые представлены в спецификации КИМ на сайте ФИПИ http://www.fipi.ru/.

При анализе результатов ЕГЭ по математике на профильном уровне в 2022 г. следует учитывать влияние следующих факторов:

– массовый переход школ на дистанционное обучение в конце учебного года 2019 - 2020 г. (обучение в 9 классе);

– частичное применение элементов дистанционных образовательных технологий в 2020-2021, 2021 - 2022 учебных годах (обучение в 10 и 11 классе)

– выпускники 2022 года не принимали участие в сдаче ОГЭ по математике в 2020 году.

Распределение заданий КИМ (**профильный уровень**) по содержанию, видам умений, уровню сложности и среднему проценту выполнения по региону, представлены в таблице 11.

| № | Проверяемые элементы содержания / умения | Уровень сложности задания | Процент выполнения задания | | | | | Средний % выполнения открытого варианта № 301 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | Средний % выполнения по всем вариантам | Группа не преодолевших минимальный балл (%) | Группа от минимального до 60 т.б. (%) | Группа от 61 до 80 т.б. (%) | Группа от 81 до 100 т.б. (%) | |
| 1 | 2.1<br>Уметь решать уравнения и неравенства | Б | **97** | 76 | 98 | 99 | 99 | 98 |
| 2 | 6.3<br>Уметь строить и исследовать простейшие математические модели | Б | **96** | 75 | 96 | 99 | 96 | 94 |
| 3 | 5.1, 5.5<br>Уметь выполнять действия с геометрическими фигурами, координатами и векторами | Б | **87** | 47 | 84 | 96 | 98 | 92 |
| 4 | 1.1 – 1.4<br>Уметь выполнять вычисления и преобразования | Б | **53** | 5 | 30 | 83 | 97 | 54 |
| 5 | 5.2 – 5.5<br>Уметь выполнять действия с геометрическими фигурами, координатами и векторами | Б | **77** | 24 | 71 | 93 | 100 | 77 |
| 6 | 4.1 – 4.3<br>Уметь выполнять действия с функциями | Б | **70** | 7 | 58 | 93 | 100 | 70 |
| 7 | 2.1, 2.2<br>Уметь использовать приобретённые знания и умения в практической деятельности и повседневной жизни | П | **76** | 15 | 70 | 93 | 98 | 79 |
| 8 | 2.1, 2.2<br>Уметь строить и исследовать простейшие математические модели | П | **66** | 8 | 52 | 90 | 100 | 61 |

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 9 | 2.1, 2.2, 3.1 – 3.3<br>Уметь выполнять действия с функциями | П | **81** | 10 | 76 | 99 | 100 | 80 |
| 10 | 6.3<br>Уметь использовать приобретённые знания и умения в практической деятельности и повседневной жизни | П | **80** | 15 | 76 | 94 | 100 | 73 |
| 11 | 4.1, 4.2<br>Уметь выполнять действия с функциями | П | **71** | 5 | 61 | 91 | 94 | 69 |
| 12 | 2.1, 2.2<br>Уметь решать уравнения и неравенства | П | **45** | 0 | 14 | [illegible] | 97 | 46 |
| 13 | 5.2 – 5.6<br>Уметь выполнять действия с геометрическими фигурами,<br>координатами и век-торами | П | **1** | 0 | 0 | [illegible] | 18 | 1 |
| 14 | 2.1, 2.2<br>Уметь решать уравнения и неравенства | П | **37** | 0 | 5 | 73 | 99 | 38 |
| 15 | 1.1, 2.1.12<br>Уметь использовать приобретённые знания и умения в практической деятельности и повседневной<br>жизни | П | **25** | 0 | 2 | 49 | 94 | 24 |
| 16 | 5.1, 5.5<br>Уметь выполнять действия с геометрическими фигурами, координатами и векторами | П | **3** | 0 | 0 | 3 | 43 | 2 |
| 17 | 2.1, 2.2, 3.1 – 3.3<br>Уметь решать уравнения и неравенства | В | **4** | 0 | 0 | 3 | 63 | 3 |
| 18 | 1.1 – 1.4, 2.1 – 2.2, 3.1 – 3.3<br>Уметь строить и исследовать простейшие математические<br>модели | В | **6** | 0 | 3 | 9 | 26 | 6 |

Анализ выполнения заданий с кратким ответом Части 1 показывает, что учащиеся достаточно успешно справились с заданиями базового уровня 1-6 (процент выполнения по всем вариантам, использованным в регионе от 53% до 97%, процент выполнения открытого варианта от 54% до 98%), хотя этот результат сопоставим с результатом 2021 года (по всем вариантам, использованным в регионе от 59% до 96%, процент выполнения открытого варианта процент выполнения от 58% до 96%).

Процент выполнения заданий с кратким ответом повышенного уровня сложности (задания 7 - 11) в 2022 году составил по всем вариантам от 66% до 81%, что выше результата 2021 г. от 52% до 73%. Процент выполнения заданий по открытому варианту составил от 61% до 80%, что ниже результата 2021 г. от 54% до 90%.

Процент выполнения заданий с развернутым ответом (задания 12-18) составил от 1% до 45% по всем вариантам, использованным в регионе и соответственно процент выполнения открытого варианта от 1% до 46%. В сравнении предыдущем годом этот результат оказался чуть выше (в 2021 г. процент выполнения по всем вариантам от 1% до 37% и открытого варианта от 1% до 39%).

Содержательный анализ выполнения заданий КИМ по математике на профильном уровне проводился на основании результатов, полученных экзаменуемыми в 2020, 2021 и 2022 г.г. А также с учетом изменений в КИМ 2022 года как в содержании, так и в количестве заданий.

Экзаменационная работа по математике на профильном уровне состоит из двух частей и включает в себя 18 заданий, которые различаются по содержанию, сложности и количеству заданий:

- часть 1 содержит 11 заданий (задания 1–11) с кратким ответом в виде целого числа или конечной десятичной дроби;
- часть 2 содержит 7 заданий (задания 12–18) с развёрнутым ответом (полная запись решения с обоснованием выполненных действий).

Анализ выполнения заданий с кратким ответом (1-11) Части 1 проведен по проверяемым умениям открытого варианта.

Задание 1 проверяло умение решать уравнения.

**Процент выполнивших задание верно**

| **Год** | **2020** | **2021** | **2022** |
|---|---|---|---|
| **Задание 5** | 97% | 95% | 98% |

*Примечание*: задание 1 КИМ 2022 г. аналогично заданию 5 КИМ прошлых лет.

Результаты, полученные выпускниками за решение задания 1, демонстрируют на протяжении последних трех лет стабильно высокую степень, более 90 %, владения базовыми навыками решения уравнений различных типов. Следует отметить, что 2% экзаменуемых допустили вычислительные ошибки в нахождении корня иррационального уравнения.

Задания 2, 8 проверяли умение строить и исследовать простейшие математические модели.

**Процент выполнивших задание верно**

| **Год** | **2020** | **2021** | **2022** |
|---|---|---|---|
| **Задание 2** | 87% | 95% | 94% |
| **Задание 8** | 37% | 66% | 61% |

*Примечание*: задание 2 и 8 КИМ 2022 г. аналогично заданиям 4 и 11 КИМ прошлых лет.

Результаты, полученные участниками экзамена за решение задания 2, демонстрируют на протяжении последних трех лет стабильно высокую степень овладения базовыми навыками решения задач по теории вероятностей. Вместе с тем наблюдается снижение результатов, полученных выпускниками за решение текстовых задач, с 66% в 2021г. до 61% в 2022г. Вместе с тем следует отметить, что результаты значительно улучшились по отношению к 2020 г.

При решении задач, требующих построения и исследования простейших математических моделей, выпускники допускали следующие типичные ошибки:

- при выполнении задания 2 обучающиеся либо не смогли применить формулу для вычисления вероятности события, либо, записав верно формулу, допускали вычислительные ошибки;
- типичные ошибки в задании 8 связаны с невнимательным чтением условия текстовой задачи и составления математической модели по условию задачи.

Задания 7 и 10 проверяли умения использовать приобретенные знания и умения в практической деятельности и повседневной жизни. Задание 10 (добавлено в КИМ 2022 г.), проверяющее умение моделировать реальные ситуации на языке теории вероятностей и статистики, вычислять в простейших случаях вероятности событий.

**Процент выполнивших задание верно**

| **Год** | **2020** | **2021** | **2022** |
|---|---|---|---|
| **Задание 7** | 37% | 66% | 79% |
| **Задание 10** | | - | 73% |

*Примечание*: задание 7 КИМ 2022 г. аналогично заданию 10 КИМ прошлых лет. Задание 10 КИМ 2022 – новое задание, ранее не использовалось в КИМ прошлых лет.

Результаты, полученные участниками экзамена за решение заданий 7, демонстрируют положительную динамику овладения базовыми умениями необходимыми при решении практико-ориентированных заданий.

Однако, следует отметить, что выпускники при решении данных задач допускали следующие ошибки:

- при выполнении задания 7 допускались ошибки в работе с формулой при нахождении значений одного из параметров, ошибки, связанные с невнимательным чтением условия или с непониманием текста задачи, а также ошибки в тождественном преобразовании выражения;
- при выполнении задания 10 допускались ошибки в неверном применении формулы для вычисления вероятности события.

Задания 3, 5 проверяли умения выполнять действия с геометрическими фигурами.

**Процент выполнивших задание верно**

| Год | 2020 | 2021 | 2022 |
|---|---|---|---|
| **Задание 3** | 73% | 59% | 92% |
| **Задание 5** | 74% | 62% | 77% |

*Примечание*: задание 3 и 5 КИМ 2022 г. аналогично заданиям 6 и 8 КИМ прошлых лет.

Результаты, полученные участниками экзамена за решение задания 3, демонстрируют высокую (92%) степень овладения базовыми навыками решения планиметрических, связанных с нахождением величины вписанного угла.

Более половины участников экзамена за последние три года успешно справляются с решением стереометрической задачи 5. Процент выпускников, выполнивших верно данное задание, вырос с 74 % в 2020 г. до 77% в 2022г., и при этом значительно повысился по отношению к 2021 г.

При решении геометрических задач выпускники допускали следующие типичные ошибки:

- в задании 3 экзаменуемые допускали вычислительные ошибки в нахождении вписанного угла *ACB*, а также ошибки, связанные с неверным чтением чертежа;
- ошибки в задании 5 связаны с незнанием формулы объема конуса.

Задания 6, 9 и 11 проверяли умения выполнять действия с функциями.

**Процент выполнивших задание верно**

| Год | 2020 | 2021 | 2022 |
|---|---|---|---|
| **Задание 6** | 68% | 67% | 70% |
| **Задание 9** | - | - | 80% |
| **Задание 11** | 55% | 52% | 69% |

*Примечание*: задание 6 и 11 КИМ 2022 г. аналогично заданиям 7 и 12 КИМ прошлых лет. Задание 9 – новое задание, добавлено в КИМ 2022 г.

Результаты, полученные участниками экзамена за решение заданий 6 и 11, показывают, что более половины участников экзамена за последние три года успешно справляются с решением задач, требующих применения действий с функциями. Процент выпускников, выполнивших верно задание 6, вырос с 68 % в 2020 г. до 70% в 2022 г. Вместе с тем наблюдается повышение результатов, полученных выпускниками за решение задания 11, с 55% в 2020г. до 69% в 2022 г., хотя незначительное снижение результата было в 2021 г. Экзаменуемые показали высокий результат выполнения нового задания 9 – 80%, верно вычислив значения $f(2)$по изображенному на рисунке графику показательной функции $f(x) = a^x$.

Типичные ошибки при выполнении данного вида заданий связаны с невнимательным чтением условия задания, а также неверным применением производной к исследованию функции.

Задание 4 проверяло умение выполнять вычисления и преобразования.

**Процент выполнивших задание верно**

| Год | 2020 | 2021 | 2022 |
|---|---|---|---|
| **Задание 4** | 59% | 73% | 54% |

*Примечание*: задание 4 КИМ 2022 г. аналогично заданию 9 КИМ прошлых лет.

Результаты, полученные участниками экзамена за решение задания 4, показывают, что более половины участников экзамена за последние три года успешно справляются с решением подобного типа. Однако, процент выпускников, выполнивших верно данное задание снизился с 73 % в 2021 г. до 54% в 2022г.

Типичные ошибки связаны с неверным использованием тригонометрического тождества $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha \cos\alpha$.

На основании проведенного анализа результатов выполнения заданий с кратким ответом, следует отметить проблемные зоны при выполнении данного типа заданий:

- невысокий уровень базовой логической культуры и читательской грамотности (неверное понимание, неполное или невнимательное чтение условия);
- слабое владение теоретическим материалом;
- вычислительные ошибки.

Контрольно-измерительные материалы по математике Части 2 включали семь заданий с развернутым ответом (12-18), требующих полной записи решения с обоснованием выполненных действий, из которых пять заданий (12-16) повышенного и два задания (17-18) высокого уровня сложности, предназначенные для более точной дифференциации абитуриентов вузов.

Анализ выполнения заданий с развернутым ответом показывает, что по традиции наиболее решаемым оказалось задание 12, в котором необходимо было решить тригонометрическое уравнение

$$2cos^2x + 3sin(-x) - 3 = 0.$$

и указать корни уравнения, принадлежащие отрезку$\left[2\pi; \frac{7\pi}{2}\right]$.

В части а) учащимся надо было выполнить необходимые тождественные преобразования, прийти к совокупности двух простейших тригонометрических уравнений. Решив полученную совокупность, выпускники должны были найти множество всех корней исходного уравнения.

В части б) учащимся необходимо было провести отбор корней, принадлежащих указанному отрезку. Эту задачу можно было выполнить: с помощью единичной окружности; с помощью графика тригонометрической функции; с использованием метода подбора; с помощью составления и решения двойных неравенств.

Характеризуя задание 12, следует отметить, что решение данной задачи требует знания тригонометрических формул, стандартных приёмов решения тригонометрических уравнений и способов отбора корней. Большинство из обучающихся приступили к выполнению данной задачи.

**Процент выполнивших задание**

| Год | 2020 | 2021 | 2022 |
|---|---|---|---|
| **1 балл** | 11% | 9,3% | 10% |
| **2 балла** | 46% | 32,5% | 46% |

*Примечание*: задание 12 КИМ 2022 г. аналогично заданию 13 КИМ прошлых лет.

Сравнивая показатели выпускников, получивших полный балл за решение задания 12, за последние три года, следует отметить, что имеется повышение результатов по отношению к результатам 2021 г., однако по сравнению с 2020 г. – результат не изменился. Вместе с тем, процент учащихся, получивших 1 балл, увеличился с 9,3% в 2021 г. до 10,0 % в 2022 г., однако это немного ниже показателя 2020 г.

Основные ошибки и проблемы, возникшие при решении задания 12:

- неумение применять тригонометрические формулы,
- ошибки при использовании свойства нечетности функции синус, то есть $sin(-x) = -sinx$;
- ошибки при использовании основного тригонометрического тождества $cos^2x + sin^2x = 1$;
- ошибки при решении простейших тригонометрических уравнений,
- незнание табличных значений синуса и косинуса;
- вычислительные ошибки;
- ошибки при отборе корней: указание корней, не принадлежащих данному промежутку; неверное указание дуг, соответствующих указанному промежутку; указание недостаточного числа корней в методе подбора.

Анализируя ошибки, следует отметить, что на протяжении последних трех лет типичными в регионе остаются ошибки при решении простейших тригонометрических уравнений, незнание табличных значений тригонометрических функций, неумение правильно отметить дугу на окружности, соответствующую указанному в условии промежутку. Исходя из этого, необходимо учителям обратить особое внимание на отработку этих навыков при решении различных типов задач, в которых необходимо решать тригонометрические уравнения.

Задание 13 – это стереометрическая задача: *Точка $M$ – середина ребра $SA$ правильной четырёхугольной пирамиды $SABCD$ с основанием $ABCD$. Точка $N$ лежит на ребре $SB$, $SN: NB = 1: 2$.*

*а) Докажите, что плоскость $CMN$ параллельна прямой $SD$.*

*б) Найдите площадь сечения пирамиды $SABCD$ плоскостью $CMN$, если все рёбра пирамиды равны 6.*

**Процент выполнивших задание**

| **Год** | **2020** | **2021** | **2022** |
|---|---|---|---|
| **1 балл** | 0,38% | 3,23% | 1,6% |
| **2 балла** | 0,6% | 0,5% | 0,2% |
| **3 балла** | - | - | 0,3% |

*Примечание*: задание 13 КИМ 2022 г. аналогично заданию 14 КИМ прошлых лет. Данное задание с 2022 года оценивается максимально 3 балла, ранее 2 балла.

Как показывают результаты, к решению стереометрической задачи приступают незначительное число выпускников, всего 2 %. Сравнивая показатели учащихся, получивших полный балл за решение задания 13, за последние три года, следует отметить, что имеется незначительное снижение результатов. Вместе с тем, процент учащихся, получивших 1 балл, снизился с 3,23% в 2021г. до 1,6 % в 2022г., однако этот показатель выше показателя 2020г.

Большинство экзаменуемых, приступивших к решению стереометрической задачи, справились только с одним из двух пунктов.

Типичные ошибки, допущенные учащимися при решении задачи 13:

1) неверно поняли условие задачи;
2) незнание свойств и признаков параллельности прямой и плоскости;

3) неверное использование теоремы Фалеса;
4) вычислительные ошибки.

Полученные выпускниками результаты показывают, что стереометрическая задача в 2022 г. оказалась для них сложнее по сравнению с прошлым годом. Как показывает анализ работ, для успешного решения геометрических задач, необходима не только хорошая математическая подготовка, но и умение логически рассуждать и четко излагать свои мысли. Следует рекомендовать, помимо решения задач из открытого банка ЕГЭ, включать в процесс обучения: задачи, требующие видения геометрических фигур; задачи, развивающие геометрическую интуицию; больше уделять внимание содержательным геометрическим задачам, развивающим видение геометрических конструкций и требующим применения вычислительных навыков.

В задание 14 экзаменуемым необходимо было решить неравенство

$$\frac{4}{3^x-27} \geq \frac{1}{3^x-9}.$$

**Процент выполнивших задание**

| Год | 2020 | 2021 | 2022 |
|---|---|---|---|
| **1 балл** | 0,8% | 0,8% | 0,7% |
| **2 балла** | 12% | 26% | 37% |

*Примечание*: задание 14 КИМ 2022 г. аналогично заданию 15 КИМ прошлых лет.

Сравнивая показатели учащихся, получивших полный балл за решение задания 14, за последние три года, следует отметить, что имеется значительное увеличение результатов как по отношению к результатам 2020 г, так и результатам 2021 г. Вместе с тем, процент учащихся, получивших 1 балл, на протяжение трёх последних лет остаётся практически одинаковым.

Решая показательное неравенство, экзаменуемые допустили следующие ошибки:

- ошибки при переносе слагаемых в левую часть неравенства и приведении их к общему знаменателю;
- ошибки при решении неравенства методом интервалов;
- ошибки при решении неравенства, содержащего показательную функцию;
- вычислительные ошибки.

Как показывает анализ работ, при решении такого типа неравенств у выпускников возникли трудности не с решением показательных неравенств, а с решением алгебраического неравенства и с выполнением алгоритма метода интервалов. Исходя из анализа, следует рекомендовать включать как в процесс обучения, так и в процесс подготовки к ЕГЭ различные типы неравенств, требующих применения алгоритма метода интервалов.

Задание 15 – текстовая задача, при решении которой необходимо построить математическую модель конкретной ситуации. В этом задании усилена сюжетная, практико-ориентированная составляющая условия:

*В июле 2026 года планируется взять кредит на три года в размере* 800 *тыс. рублей. Условия его возврата таковы:*

*– каждый январь долг будет возрастать на* 20% *по сравнению с концом предыдущего года;*

*– с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга;*

*– платежи в 2027 и 2028 годах должны быть равными;*

*– к июлю 2029 года долг должен быть выплачен полностью.*

*Известно, что сумма всех платежей после полного погашения кредита будет равна* 1254,4 *тыс. рублей. Сколько рублей составит платёж 2027 года?*

Для решения данной задачи учащимся необходимо было построить математическую модель и провести ее исследование.

**Процент выполнивших задание**

| Год | 2020 | 2021 | 2022 |
|---|---|---|---|
| **1 балл** | 8,2% | 1,6% | 3,4% |
| **2 балла** | 0,9% | 1,7% | 23,9% |
| **3 балла** | 5,3% | 19% | - |

*Примечание*: задание 15 КИМ 2022 г. аналогично заданию 17 КИМ прошлых лет. Данное задание с 2022 года оценивается максимально 2 балла, ранее 3 балла.

Сравнивая показатели учащихся за последние три года, которые верно составили математическую модель, исследовали ее, пришли к правильному ответу и получили полный балл за решение задания, отмечаем, что имеется значительное увеличение результатов как по отношению к результатам 2020 г, так и результатам 2021 г.

Процент учащихся, которые правильно составили математическую модель, приступили к ее исследованию и получили за решение один балл увеличился с 1,6% в 2021 г. до 3,4% в 2022 г., однако этот результат ниже результата 2020 г.

Как и в предыдущий год, одной из самых распространенных ошибок, допущенных при решении задачи, является непонимание школьниками разницы между понятием процента и коэффициента увеличения долга.

Часть экзаменуемых правильно составив математическую модель и подставив в неё числовые данные из условия задачи, либо не смогла прийти к линейному уравнению с верными коэффициентами, либо получив нужное уравнение решила его неправильно из-за вычислительных ошибок.

Анализируя работы выпускников, приступивших к выполнению задания 15, следует рекомендовать и в процессе обучения, и в процессе подготовки к ЕГЭ больше уделять внимание развитию умения проводить логические рассуждения, чётко и грамотно излагать свои мысли при описании и составлении математической модели.

Задание 16, как и в предыдущие годы являлась планиметрической задачей, состоящей из двух частей:

*На стороне $BC$ треугольника $ABC$ отмечена точка $D$ так, что $AB = BD$. Биссектриса $BF$ треугольника $ABC$ пересекает прямую $AD$ в точке $E$. Из точки $C$ на прямую $AD$ опущен перпендикуляр $CK$.*

*а) Докажите, что $AB : BC = AE : EK$.*

*б) Найдите отношение площади треугольника $ABE$ к площади четырёхугольника $CDEF$, если $BD : DC = 5 : 2$.*

К выполнению задачи 16 приступало не так много учащихся.

**Процент выполнивших задание**

| Год | 2020 | 2021 | 2022 |
|---|---|---|---|
| **1 балл** | 6% | 2,1% | 4% |
| **2 балла** | 1% | 0,1% | 0,3% |
| **3 балла** | 5% | 0,6% | 1,2% |

*Примечание: Задание 16 КИМ 2022 соответствует заданием КИМ прошлых лет и в содержании, и в оценивании.*

Сравнивая показатели учащихся, получивших полный балл за решение задания 16, за последние три года, следует отметить, что процент выполнивших правильно данную задачу немного увеличился по отношению к 2021 году, но все равно ниже результатов 2020 г. Аналогично увеличился процент учащихся, получивших за решение задачи 16 два балла в сравнении с 2021 г. Вместе с тем, процент учащихся, получивших 1 балл, увеличился с 2,1% в 2021 г. до 4,0% в 2022 г., однако этот показатель ниже показателя 2020 г.

При решении задачи 16 учащиеся допустили следующие ошибки:

1) неправильно выполняли геометрические построения;

2) при доказательстве пункта а) использовали факты, являющиеся следствием доказываемого утверждения;

3) при решении пункта б) пользовались неочевидными утверждениями без доказательства.

Несмотря на незначительное улучшение показателей, полученные выпускниками результаты показывают, что планиметрическая задача также как и стереометрическая в 2022г. оказалась для них сложнее по сравнению с прошлым годом. Как показывает анализ работ и допущенные ошибки, для успешного решения геометрических задач, необходима не только хорошая математическая подготовка, но и умение логически рассуждать и четко излагать свои мысли. Следует рекомендовать, помимо решения задач из открытого банка ЕГЭ, включать в процесс обучения: задачи, требующие видения геометрических фигур; задачи развивающие геометрическую интуицию; больше уделять внимание содержательным геометрическим задачам, развивающим видение геометрических конструкций, требующим четкого изложения доказательства и применения вычислительных навыков.

Задание 17 – это задача с параметром, оцениваемая в четыре балла. В этом году экзаменуемым необходимо было решить уравнение.

*Найдите все значения $a$, при каждом из которых уравнение*

$$a^2 - ax - 2x^2 - 6a + 3x + 9|x| = 0$$

*имеет четыре различных корня.*

Данную задачу можно было решить, как графическим, так и аналитическим способом.

При аналитическом способе решения выпускники должны были преобразовать исходное уравнение, используя свойства модуля. Затем решив два уравнения, определить значения параметра, при которых исходное уравнение имеет четыре различных корня.

При графическом способе решения после преобразования исходного уравнения получить равенства, задающие пару лучей. Затем проанализировать их взаимное расположение и определить значения параметра, при которых уравнение имеет четыре различных корня.

**Процент выполнивших задание**

| Год | 2020 | 2021 | 2022 |
|---|---|---|---|
| **1 балл** | 4,2% | 3,1% | 4,9% |
| **2 балла** | 0,3% | 0,2% | 0,5% |
| **3 балла** | 0,1% | 0,03% | 0,1% |
| **4 балла** | 0,28% | 0,7% | 2,3% |

*Примечание:* задание 17 КИМ 2022 г. аналогично заданию 18 КИМ прошлых лет.

Сравнивая показатели учащихся, получивших четыре балла за решение задания 17, за последние три года, следует отметить, что процент выполнивших правильно данную задачу остается невысоким. Вместе с тем, процент выполнивших задачу вырос с 0,28% в 2020 г. до 2,3% в 2022 г. Следует отметить, что возрос процент обучающихся, получивших за решение задачи от одного до трех баллов по сравнению с результатами 2020 г. и 2021 г.

Ошибки, которые выпускники допускали наиболее часто:

- ошибки в преобразованиях, в которых необходимо использовать определение и свойства модуля;

-ошибки при решении уравнений, содержащих модуль;

-решая уравнение с модулем не учитывали необходимые ограничения;

-вычислительные ошибки

Анализируя работы, следует отметить, что большая часть выпускников отдали предпочтение аналитическому способу решения данной задачи. Не смотря на улучшение показателей, следует рекомендовать обращать внимание в процессе обучения и подготовки к ЕГЭ на то, что для решения подобного типа задач могут быть применены различные методы и приемы, комбинируя которые возможно получить верный результат. При этом отрабатывать умение логически рассуждать и четко излагать свои мысли.

Последнее из заданий (18 задача) – это сложная задача олимпиадного типа, требующая от экзаменуемых строгих логических рассуждений. В контрольно-измерительных материалах этого года предложена задача следующего вида:

*Есть три коробки: в первой коробке 97 камней, во второй – 104, а в третьей коробке камней нет. За один ход берут по одному камню из любых двух коробок и кладут в оставшуюся. Сделали некоторое количество таких ходов.*

*а) Могло ли в первой коробке оказаться 97 камней, во второй – 89, а в третьей – 15?*

*б) Мог ли в третьей коробке оказаться 201 камень?*

*в) В первой коробке оказался 1 камень. Какое наибольшее число камней могло оказаться в третьей коробке?*

Согласно критериям оценивания, обучающиеся должны были в общем виде описать условия, соответствующие пунктам а), б) и в), и обосновать их.

**Процент выполнивших задание**

| Год | 2020 | 2021 | 2022 |
|---|---|---|---|
| **1 балл** | 27,3% | 29,9% | 20,8% |
| **2 балла** | 17,2% | 10,4% | 1,4% |
| **3 балла** | 2,0% | 0,2% | 0,1% |
| **4 балла** | 1,8% | 0,3% | 0,3% |

*Примечание:* задание 18 КИМ 2022 г. аналогично заданию 19 КИМ прошлых лет.

Сравнивая показатели учащихся, получивших четыре балла за решение задания 18, за последние три года, следует отметить, что процент выполнивших правильно данную задачу остается невысоким. Процент учащихся, получивших за решение задачи от одного до четырех баллов снизился в сравнении с результатами 2020 г. и 2021 г.

По-прежнему, основной проблемой решения задания 18 является неумение провести полное обоснование доказываемого утверждения. Учащиеся, приводя обоснования верных ответов, пропускали важные шаги рассуждений.

Следует отметить, что процент выполнения заданий повышенного и высокого уровней сложности, предполагающих свободное владение материалом курса математики, находится в регионе на невысоком уровне.

**ВЫВОДЫ об итогах анализа выполнения заданий, групп заданий:**

*Перечень* элементов умений, усвоенных в процессе обучения, выпускниками региона в целом можно считать **достаточным на базовом уровне**.

- уметь использовать приобретенные знания и умения в практической деятельности и повседневной жизни;
- уметь строить и исследовать простейшие математические модели;
- уметь решать уравнения и неравенства.

Перечень элементов умений, усвоение которых школьниками региона в целом **нельзя считать достаточным на базовом уровне**:

- уметь выполнять действия с геометрическими фигурами.

Следует отметить невысокий процент выполнения геометрический заданий, что свидетельствует о сохраняющихся системных недостатках в преподавании геометрии в основной школе и недостаточном уровне формирования умения выполнять действия с геометрическими фигурами. Также причиной является рассмотрение лишь тех типов задач, которые встречались на экзамене в предыдущие годы, вместо полноценного изучения геометрии.

Как показывает анализ работ и допущенные ошибки, для успешного решения геометрических задач, необходима не только хорошая математическая подготовка, но и умение логически рассуждать и четко излагать свои мысли. Следует рекомендовать, помимо решения задач из открытого банка ЕГЭ, включать в процесс обучения: задачи, требующие видения геометрических фигур; задачи развивающие геометрическую интуицию; больше уделять внимание содержательным геометрическим задачам, развивающим видение геометрических конструкций, требующим четкого изложения доказательства и применения вычислительных навыков.

Задания, которые проверяют умение выполнять действия с функциями, например, задание 11 (на нахождение экстремальных значений функции) относится к заданиям повышенного уровня, которое традиционно вызывает трудности у школьников. Невысокий процент выполнения данного задания (от 52% до 69%) связан с тем, что данная тема «Производная» была изучена в основном учениками самостоятельно во время дистанционного обучения. Задание проверяло сформированность умения использовать производную для исследования функции. Для выполнения этого задания нужно знать связь производной со свойствами функции и уметь находить производную функции. Поэтому, необходимо учить школьников в полном объёме исследованию функции с помощью производной.

Нельзя не отметить и тот факт, что даже при сформированных умениях недостаточная внимательность приводит к ошибкам: запись ответа не на поставленный вопрос. Такие ошибки наиболее характерны при выполнении данного задания 11.

КИМ ЕГЭ 2022 года (профильный уровень) в сравнении с КИМ прошлых лет содержал ряд изменений, которые представлены в спецификации КИМ на сайте ФИПИ http://www.fipi.ru/.

Анализ результатов выполнения заданий ЕГЭ 2022 г. по математике обучающимися Владимирского региона показывает, что использованные КИМы в целом соответствуют целям проведения экзамена, позволяют дифференцировать выпускников с различной мотивацией и уровнем подготовки по ключевым разделам курса математики.

Мероприятия, предложенные для включения в дорожную карту в 2022 году, позволили организовать как системную подготовку учителя, так и обучающихся к итоговой аттестации. Актуальным является ежегодное проведение мониторинга качества образовательной подготовки обучающихся 11 классов с целью оценки уровня освоения выпускниками федерального государственного образовательного стандарта среднего общего образования по математике в образовательных организациях региона (Письмо Департамента образования Владимирской области № ДО-1575-02-07 от 21.02.2022).

## 2.4. Методические рекомендации по выполнению заданий с развернутым ответом ЕГЭ (профильный уровень)

Приведем решение и критерии оценивания заданий с развернутым ответом открытого варианта КИМа ЕГЭ по математике профильного уровня.

**Задание 12.** а) Решите уравнение

$$2\cos^2 x + 3\sin(-x) - 3 = 0.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[2\pi; \frac{7\pi}{2}\right]$.

***Решение.***

а) Известно, что функция синус нечетная, то есть $\sin(-x) = -\sin x$. Используя это свойство и основное тригонометрическое тождество $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$, исходное уравнение можно переписать в виде:

$$2(1 - \sin^2 x) + 3(-\sin x) - 3 = 0,$$

$$2 - 2\sin^2 x - 3\sin x - 3 = 0,$$
$$-2\sin^2 x - 3\sin x - 1 = 0,$$
$$2\sin^2 x + 3\sin x + 1 = 0.$$

Сделаем замену $\sin x = t$, после чего получим квадратное уравнение

$$2t^2 + 3t + 1 = 0,$$

дискриминант которого $D = 3^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1 = 1$ положителен, поэтому имеет два различных корня:

$$t_1 = \frac{-3-1}{2 \cdot 2} \quad \text{и} \quad t_2 = \frac{-3+1}{2 \cdot 2},$$

то есть $t_1 = -1$ и $t_2 = -\frac{1}{2}$.

Обратная замена приводит к двум простейшим тригонометрическим уравнениям

$$\sin x = -1 \quad \text{и} \quad \sin x = -\frac{1}{2},$$

решениями которых являются следующие множества:

$$x_1 = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad x_2 = -\frac{\pi}{6} + 2\pi m, \quad x_3 = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi l,$$

где $n, m, l \in \mathbb{Z}$.

Все указанные множества являются решениями исходного уравнения.

б) Произведем отбор корней, используя двойные неравенства:

1) $2\pi \leq -\frac{\pi}{2} + 2\pi n \leq \frac{7\pi}{2}$;

2) $2\pi \leq -\frac{\pi}{6} + 2\pi m \leq \frac{7\pi}{2}$;

3) $2\pi \leq -\frac{5\pi}{6} + 2\pi l \leq \frac{7\pi}{2}$.

1) Разделим все части неравенства $2\pi \leq -\frac{\pi}{2} + 2\pi n \leq \frac{7\pi}{2}$ на $\pi$ и получим $2 \leq -\frac{1}{2} + 2n \leq \frac{7}{2}$. Затем ко всем частям неравенства прибавим $\frac{1}{2}$, что приводит к соотношению $\frac{5}{2} \leq 2n \leq 4$ или $\frac{5}{4} \leq n \leq 2$.

Последнему неравенству удовлетворяет только одно целое значение: $n = 2$.

Таким образом, если $n = 2$, то $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi \cdot 2 = \frac{7\pi}{2}$.

2) Все части неравенства $2\pi \leq -\frac{\pi}{6} + 2\pi m \leq \frac{7\pi}{2}$ разделим на $\pi$ и получим неравенство $2 \leq -\frac{1}{6} + 2m \leq \frac{7}{2}$, прибавим $\frac{1}{6}$ ко всем частям неравенства

$$2 + \frac{1}{6} \leq 2m \leq \frac{7}{2} + \frac{1}{6}, \quad \frac{13}{6} \leq 2m \leq \frac{22}{6}.$$

Разделим все части последнего уравнения на 2 и получим неравенство $\frac{13}{12} \leq m \leq \frac{22}{12}$, не имеющее целых решений.

3) Разделим все части неравенства $2\pi \leq -\frac{5\pi}{6} + 2\pi l \leq \frac{7\pi}{2}$ на $\pi$ и получим, что $2 \leq -\frac{5}{6} + 2l \leq \frac{7}{2}$. Прибавив ко всем частям неравенства $\frac{5}{6}$, приходим к тому, что

$$2 + \frac{5}{6} \leq 2l \leq \frac{7}{2} + \frac{5}{6}, \quad \frac{17}{6} \leq 2l \leq \frac{26}{6}.$$

Поделим все части неравенства на 2. Неравенству $\frac{17}{12} \le l \le \frac{26}{12}$ удовлетворяет единственное целое число $l = 2$. В таком случае $x = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi \cdot 2 = \frac{19\pi}{6}$.

Таким образом, приходим к выводу, что исходное уравнение на отрезке $\left[2\pi; \frac{7\pi}{2}\right]$ имеет два решения: $\frac{19\pi}{6}$ и $\frac{7\pi}{2}$.

*Ответ.* а) $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$;

$x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi m, m \in \mathbb{Z}$;,

$x = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi l, l \in \mathbb{Z}$;

б) $\frac{19\pi}{6}, \frac{7\pi}{2}$.

**Замечание.** Отбор корней может быть произведён иными способами, например, с помощью единичной окружности или методом подбора.

| Содержание критерия | Баллы |
|---|---|
| Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах | 2 |
| Обоснованно получен верный ответ в пункте *а*<br>ИЛИ<br>получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения обоих пунктов: пункта *а* и пункта *б* | 1 |
| Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше | 0 |
| *Максимальный балл* | 2 |

**Задание 13.**

Точка $M$ – середина ребра $SA$ правильной четырёхугольной пирамиды $SABCD$ с основанием $ABCD$. Точка $N$ лежит на ребре $SB$, $SN : NB = 1 : 2$.

а) Докажите, что плоскость $CMN$ параллельна прямой $SD$.

б) Найдите площадь сечения пирамиды $SABCD$ плоскостью $CMN$, если все рёбра пирамиды равны 6.

***Авторское решение.***

а) Пусть прямые $AB$ и $MN$ пересекаются в точке $T$, а прямая $TC$ пересекает ребро $AD$ в точке $K$ (рис. 1). Точка $K$ лежит в плоскости $CMN$.

Рассмотрим плоскость $SAB$ (рис. 2). Пусть точка $E$ – середина отрезка $NB$. Тогда отрезок $MN$ – средняя линия треугольника $ASE$, а прямая $MN$ параллельна прямой $AE$ – средняя линия треугольника $TNB$, откуда $AT = AB$.

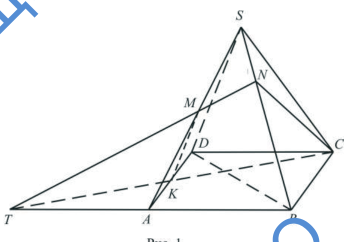



Рис. 1

Прямоугольные треугольники $TAK$ и $CDK$ (см. рис. 1) равны по катету и противолежащему углу ($AT = CD$, $\angle TKA = \angle CKD$), значит, точка $K$ – середина ребра $AD$, то есть отрезок $MK$ – средняя линия треугольника $SAD$. Следовательно, плоскость $CMN$, содержащая прямую $MK$, параллельную прямой $SD$, параллельна прямой $SD$.

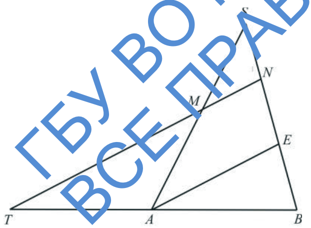



Рис. 2

б) Четырёхугольник $CNMK$ – сечение пирамиды $SABCD$ плоскостью $CMN$. Отрезки $MN$ и $AE$ являются средними линиями треугольников $ASE$ и $TNB$ соответственно, значит, $TN = 2AE = 4MN$; $TM:TN = 3:4$.

Из треугольников $SMN$, $SNC$ и $TBC$ находим:

$$MN = \sqrt{MS^2 + SN^2 - 2MS \cdot SN \cdot \cos 60^0} = \sqrt{9 + 4 - 6} = \sqrt{7};$$

$$TN = 4MN = 4\sqrt{7},$$

$$CN = \sqrt{SC^2 + SN^2 - 2SC \cdot SN \cdot \cos 60^0} = \sqrt{36 + 4 - 12} = 2\sqrt{7},$$

$$TC = \sqrt{TB^2 + BC^2} = \sqrt{144 + 36} = 6\sqrt{5},$$

откуда

$$\cos\angle TNC = \frac{TN^2 + CN^2 - TC^2}{2TN \cdot CN} = \frac{112 + 28 - 180}{2 \cdot 4\sqrt{7} \cdot 2\sqrt{7}} = -\frac{5}{14};$$

$$\sin\angle TNC = \sqrt{1 - \cos^2\angle TNC} = \frac{\sqrt{171}}{14} = \frac{3\sqrt{19}}{14}.$$

Площадь треугольника $TNC$ равна

$$\frac{TN \cdot CN \cdot \sin\angle TNC}{2} = \frac{4\sqrt{7} \cdot 2\sqrt{7} \cdot 3\sqrt{19}}{28} = 6\sqrt{19}.$$

Площадь треугольника $TMK$ составляет $\frac{TM}{TN} \cdot \frac{TK}{TC} = \frac{3}{8}$ площади треугольника $TNC$, значит, площадь четырёхугольника $CNMK$ составляет $\frac{5}{8}$ площади треугольника $TNC$ и равна $\frac{5}{8} \cdot 6\sqrt{19} = \frac{15\sqrt{19}}{4}$.

*Данная задача может быть решена другим способом. Приведём один из вариантов решения.*

***Решение.***

а) 1. Проведём прямую $MN \in (ABS)$ до пересечения с прямой $AB \in (ABS)$, $T = MN \cap AB$ (рис. 1).

2. Прямые $TC \in (ABC)$ и $AD \in (ABC)$ пересекаются в точке $K$.

3. Прямые $MN \in (ABS)$, $MK \in (ADS)$, $KC \in (ABC)$ и $CN \in (BCS)$ образуют четырёхугольник $CNMK$, являющийся сечением пирамиды $SABCD$ плоскостью $CMN$.

4. Применим теорему Менелая к $\Delta ABC$ и прямой $TN$, согласно которой

$$\frac{BN}{NS}\cdot\frac{SM}{MA}\cdot\frac{AT}{TB}=1.$$

По условию задачи $BN{:}NS = 2{:}1$ и $SM = MA$, поэтому справедливы равенства

$$\frac{2}{1}\cdot\frac{1}{1}\cdot\frac{AT}{TB}=1 \quad \text{и} \quad \frac{AT}{TB}=\frac{1}{2}.$$

5. $\Delta KAT$ подобен $\Delta CBT$ по двум углам: $\angle T$ – общий, $\angle KAT = \angle CBT = 90^0$ ($SABCD$ – правильная четырёхугольная пирамида).

6. Из подобия $\Delta KAT$ и $\Delta CBT$ следует, что $\frac{TK}{TC}=\frac{AK}{BC}=\frac{AT}{BT}=\frac{1}{2}$.

7. $AD = BC$ ($ABCD$ – квадрат), значит, $\frac{AK}{AD}=\frac{1}{2}$, то есть $K$ – середина ребра $AD$.

8. $AK = KD$, $AM = MS$, следовательно, $MK$ – средняя линия $\Delta ADS$, значит $MK \parallel SD$.

9. Известно, что прямая параллельна некоторой плоскости, если параллельна какой-либо прямой в этой плоскости. Доказано, что $SD \parallel MK$, $MK \subset (CNMK)$, следовательно, $SD \parallel (CNMK)$.

б) 1. $S_{CNMK} = S_{\Delta TCN} - S_{\Delta TKM}$.

*2. Из $\Delta TBC$, где $\angle TBC = 90^0$, $BC = 6$, $TB = 2TA = 2AB = 12$, по теореме Пифагора находим:*

$$TC^2 = TB^2 + BC^2,$$
$$TC^2 = 12^2 + 6^2 = 144 + 36 = 180,$$
$$TC = \sqrt{180} = 6\sqrt{5}.$$

$$3.\text{ Из } \Delta TBN, \text{где } \angle TBN = 60^0, TB = 12, BN = \frac{2}{3}SB = \frac{2}{3}\cdot 6$$
$$= 4, \text{по теореме косинусов, получаем:}$$
$$TN^2 = TB^2 + BN^2 - 2\cdot TB\cdot BN\cdot\cos\angle TBN,$$
$$TN^2 = 12^2 + 4^2 - 2\cdot 12\cdot 4\cdot\cos 60^0 = 144 + 16 - 48 = 112,$$
$$TN = \sqrt{112} = 4\sqrt{7}.$$

4. Из $\Delta NBC$, где $\angle NBC = 60^0$, $BC = 6$, $BN = 4$, по теореме косинусов, имеем:

$$NC^2 = NB^2 + BC^2 - 2\cdot NB\cdot BC\cdot\cos\angle NBC,$$
$$NC^2 = 4^2 + 6^2 - 2\cdot 4\cdot 6\cdot\cos 60^0 = 16 + 36 - 24 = 28,$$
$$NC = \sqrt{28} = 2\sqrt{7}.$$

5. В $\Delta TCN$: $P_{\Delta TCN} = 6\sqrt{5} + 4\sqrt{7} + 2\sqrt{7} = 6\sqrt{5} + 6\sqrt{7}$ и по формуле Герона вычисляем площадь

$$S_{\Delta TCN} = \sqrt{(3\sqrt{5}+3\sqrt{7})(3\sqrt{5}+3\sqrt{7}-6\sqrt{5})}\cdot$$
$$\cdot\sqrt{(3\sqrt{5}+3\sqrt{7}-4\sqrt{7})(3\sqrt{5}+3\sqrt{7}-2\sqrt{7})} =$$
$$= \sqrt{(3\sqrt{5}+3\sqrt{7})(3\sqrt{7}-3\sqrt{5})(3\sqrt{5}-\sqrt{7})(3\sqrt{5}+\sqrt{7})} =$$
$$= \sqrt{\left((3\sqrt{7})^2-(3\sqrt{5})^2\right)\left((3\sqrt{5})^2-(\sqrt{7})^2\right)} =$$
$$= \sqrt{(63-45)(45-7)} = \sqrt{18\cdot 38} = 6\sqrt{19}.$$

6. Из $\Delta TAM$, где $\angle TAM = 120^0$, $TA = 6$, $AM = 3$, по теореме косинусов, имеем:

$$TM^2 = TA^2 + AM^2 - 2 \cdot TA \cdot AM \cdot \cos \angle TAM,$$

$$TM^2 = 6^2 + 3^2 - 2 \cdot 6 \cdot 3 \cdot \cos 120^0 = 36 + 9 + 18 = 63,$$

$$TM = \sqrt{63} = 3\sqrt{7}.$$

7. В $\Delta TKM$: $TK = \frac{1}{2}TC = 3\sqrt{5}$, $MK = \frac{1}{2}SD = 3$, $TM = 3\sqrt{7}$, поэтому $P_{\Delta TKM} = 3 + 3\sqrt{5} + 3\sqrt{7}$. По формуле Герона находим:

$$S_{\Delta TKM} = \sqrt{\frac{3+3\sqrt{5}+3\sqrt{7}}{2}\left(\frac{3+3\sqrt{5}+3\sqrt{7}}{2} - 3\sqrt{5}\right)} \cdot$$

$$\cdot \sqrt{\left(\frac{3+3\sqrt{5}+3\sqrt{7}}{2} - 3\right)\left(\frac{3+3\sqrt{5}+3\sqrt{7}}{2} - 3\sqrt{7}\right)} =$$

$$= \sqrt{\frac{3+3\sqrt{5}+3\sqrt{7}}{2} \cdot \frac{3+3\sqrt{7}-3\sqrt{5}}{2}} \cdot$$

$$\cdot \sqrt{\frac{3\sqrt{5}+3\sqrt{7}-3}{2} \cdot \frac{3+3\sqrt{5}-3\sqrt{7}}{2}} =$$

$$= \frac{9}{4}\sqrt{\left(1+\sqrt{7}+\sqrt{5}\right)\left(1+\sqrt{7}-\sqrt{5}\right)} \cdot$$

$$\cdot \sqrt{\left(\sqrt{5}+\left(\sqrt{7}-1\right)\right)\left(\sqrt{5}-\left(\sqrt{7}-1\right)\right)} =$$

$$= \frac{9}{4}\sqrt{\left(\left(1+\sqrt{7}\right)^2 - \left(\sqrt{5}\right)^2\right)\left(\left(\sqrt{5}\right)^2 - \left(\sqrt{7}-1\right)^2\right)}$$

$$= \frac{9}{4}\sqrt{\left(1+2\sqrt{7}+7-5\right)\left(5-7+2\sqrt{7}-1\right)} =$$

$$= \frac{9}{4}\sqrt{\left(2\sqrt{7}+3\right)\left(2\sqrt{7}-3\right)} = \frac{9}{4}\sqrt{\left(2\sqrt{7}\right)^2 - 3^2} =$$

$$= \frac{9}{4}\sqrt{28-9} = \frac{9\sqrt{19}}{4}.$$

8. $S_{CNMK} = 6\sqrt{19} - \frac{9\sqrt{19}}{4} = \frac{15\sqrt{19}}{4}$.

*Ответ:* б) $\frac{15\sqrt{19}}{4}$.

| Содержание критерия | Баллы |
|---|---|
| Имеется верное доказательство утверждения пункта *а* и обоснованно получен верный ответ в пункте *б* | 3 |
| Обоснованно получен верный ответ в пункте *б*<br>ИЛИ<br>имеется верное доказательство утверждения пункта *а* и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки | 2 |
| Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, | 1 |

| Содержание критерия | Баллы |
|---|---|
| ИЛИ<br>при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки<br>ИЛИ<br>обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен | |
| Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше | 0 |
| *Максимальный балл* | 3 |

**Задание 14.**
Решите неравенство

$$\frac{4}{3^x-27} \ge \frac{1}{3^x-9}.$$

***Решение.***

Обозначим $t = 3^x$ и получим рациональное неравенство

$$\frac{4}{t-27} \ge \frac{1}{t-9},$$

которое решим методом интервалов. С этой целью преобразуем последнее неравенство, перенесём слагаемые в левую часть неравенства и приведем их к общему знаменателю

$$\frac{4}{t-27} - \frac{1}{t-9} \ge 0, \quad \frac{4(t-9)-(t-27)}{(t-27)(t-9)} \ge 0,$$

$$\frac{4t-36-t+27}{(t-27)(t-9)} \ge 0, \quad \frac{3t-9}{(t-27)(t-9)} \ge 0.$$

Нули числителя и знаменателя: $t = 3$, $t = 9$, $t = 27$.

Отметим указанные числа на числовой оси учитывая, что $t \ne 9$, $t \ne 27$ и расставим


знаки выражения $\frac{3t-9}{(t-27)(t-9)}$.

Значения переменной, являющиеся решением последнего неравенства, удовлетворяют условию

$$3 \le t < 9 \quad \text{или} \quad t > 27.$$

Сделаем обратную замену и получим два показательных неравенства:

$$3 \le 3^x < 9 \quad \text{или} \quad 3^x > 27,$$

$$3^1 \le 3^x < 3^2 \quad \text{или} \quad 3^x > 3^3.$$

Основание показательной функции, входящей в это неравенство больше единицы, поэтому при переходе к ограничениям на аргумент, знаки неравенств сохраняются, то есть

$$1 \le x < 2 \quad \text{или} \quad x > 3.$$

Значит, $x \in [1;\ 2)$ или $x \in (3;\ +\infty)$. Указанные множества являются решением исходного неравенства.

*Ответ:* $x \in [1;\ 2) \cup (3;\ +\infty)$.

| Содержание критерия | Баллы |
|---|---|
| Обоснованно получен верный ответ | 2 |
| Обоснованно получен верный ответ, отличающийся от верного исключением точки 1,<br>ИЛИ<br>получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения | 1 |
| Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше | 0 |
| *Максимальный балл* | 2 |

**Задание 15.**

В июле 2026 года планируется взять кредит на три года в размере 800 тыс. рублей. Условия его возврата таковы:

– каждый январь долг будет возрастать на 20% по сравнению с концом предыдущего года;

– с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга;

– платежи в 2027 и 2028 годах должны быть равными;

– к июлю 2029 года долг должен быть выплачен полностью.

Известно, что сумма всех платежей после полного погашения кредита будет равна 1254,4 тыс. рублей. Сколько рублей составит платёж 2027 года?

***Авторское решение.***

Пусть платежи в 2027 и 2028 годах составят по $x$ тыс. рублей.

В январе 2027 года долг (в тыс. рублей) будет равен 960, а в июле равен $960 - x$. В январе 2028 года долг будет равен $1152 - 1{,}2x$, а в июле равен $1152 - 2{,}2x$. В январе 2029 года долг будет равен $1382{,}4 - 2{,}64x$. По условию, к июлю 2029 года долг должен быть выплачен полностью, значит, платёж в 2029 году должен быть равен $(1382{,}4 - 2{,}64x)$ тыс. рублей, а сумма всех платежей будет составлять $(1382{,}4 - 0{,}64x)$ тыс. рублей. Получаем:

$$1382{,}4 - 0{,}64x = 1254{,}4; \quad 0{,}64x = 128,$$

откуда $x = 200$.

Платёж в 2027 году должен быть равен 200 тыс. рублей.

*Решить данную задачу можно, если построить математическую модель в общем виде. Приведём этот способ решения.*

***Решение.***

Пусть $S$ тыс. рублей – сумма кредита (по условию $S = 800$), $X$ тыс. рублей – величина выплаты по кредиту в 2027 или 2028 годах, $S_{общ}$ тыс. рублей – общая сумма выплат по кредиту за три года (по условию $S_{общ} = 1254{,}4$), $r\%$ – годовая ставка ко кредиту (по условию $r = 20$). Коэффициент увеличения долга по кредиту $k$ будет равен $k = 1 + \frac{r}{100}$ $(k = 1{,}2)$. Тогда по условию задачи получаем:

| Платежный год | Долг на начало платежного года | Долг на конец платежного года | Величина выплаты |
|---|---|---|---|
| 1 | $S$ | $kS$ | $X$ |
| 2 | $kS - X$ | $k(kS - X)$ | $X$ |
| 3 | $k(kS - X) - X$ | $k(k(kS - X) - X)$ | $k(k(kS - X) - X)$ |
| 4 | 0 | | |

Найдём общую сумму выплат:

$$X + X + k(k(kS - X) - X) =$$
$$= 2X + k^3S - k^2X - kX = k^3S + X(2 - k^2 - k).$$

Получаем уравнение

$$S_{\text{общ}} = k^3S + X(2 - k^2 - k).$$

Решаем уравнение относительно $X$:

$$X(2 - k^2 - k) = S_{\text{общ}} - k^3S,$$
$$X = \frac{S_{\text{общ}} - k^3S}{2 - k^2 - k},$$
$$X = \frac{1254{,}4 - 1{,}2^3 \cdot 800}{2 - 1{,}2^2 - 1{,}2},$$
$$X = \frac{1254{,}4 - 1{,}728 \cdot 800}{2 - 1{,}44 - 1{,}2},$$
$$X = \frac{1254{,}4 - 1382{,}4}{-0{,}64},$$
$$X = \frac{-128}{-0{,}64},$$
$$X = 200.$$

Таким образом, величина выплаты в 2027 году составит 200 тыс. рублей.

*Ответ:* 200 тыс. рублей.

| **Содержание критерия** | **Баллы** |
|---|---|
| Обоснованно получен верный ответ | 2 |
| Верно построена математическая модель | 1 |
| Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше | 0 |
| *Максимальный балл* | 2 |

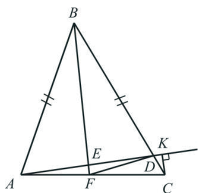
**Задание 16.**

На стороне $BC$ треугольника $ABC$ отмечена точка $D$ так, что $AB = BD$. Биссектриса $BF$ треугольника $ABC$ пересекает прямую $AD$ в точке $E$. Из точки $C$ на прямую $AD$ опущен перпендикуляр $CK$.

а) Докажите, что $AB: BC = AE: EK$.

б) Найдите отношение площади треугольника $ABE$ к площади четырёхугольника $CDEF$, если $BD: DC = 5: 2$.

***Авторское решение.***



а) В равнобедренном треугольнике $ABD$ биссектриса $BE$ является медианой и высотой. Следовательно, прямые $BE$ и $CK$ перпендикулярны прямой $AK$, а значит, параллельны. По свойству биссектрисы треугольника $AB : BC = AF : FC$, а по теореме Фалеса $AF : FC = AE : EK$. Таким образом, $AB : BC = AF : EK$.

б) Прямоугольные треугольники $BED$ и $CDK$ подобны по острому углу ($\angle BDE = \angle CDK$), откуда получаем:

$$BE : CK = BD : CD = 5 : 2.$$

Прямоугольные треугольники $AEF$ и $AKC$ подобны по общему острому углу $A$, откуда:

$$\frac{EF}{KC} = \frac{AE}{AK} = \frac{AE}{AE + EK} = \frac{1}{1 + \frac{EK}{AE}} = \frac{1}{1 + \frac{BC}{AB}} = \frac{1}{1 + \frac{BC}{BD}} = \frac{1}{1 + \frac{7}{5}} = \frac{5}{12};$$

$$BE : EF = \frac{BE}{CK} \cdot \frac{CK}{EF} = \frac{5}{2} \cdot \frac{12}{5} = 6.$$

Обозначим площади многоугольников $ABE$, $BDE$, $DEF$, $BFD$, $CFD$ и $CDEF$ через $S$, $S_{BDE}$, $S_{DEF}$, $S_{BFD}$, $S_{CFD}$ и $S_{CDEF}$ соответственно. Треугольники $BFD$ и $CFD$ имеют общую высоту, проведённую из вершины $F$, треугольники $ABE$ и $DBE$ равны; треугольники $BDE$ и $DEF$ имеют общую высоту, проведённую из вершины $D$. Следовательно, получаем:

$$S_{BDE} = S; \quad S_{DEF} = \frac{EF}{BE} \cdot S_{BDE} = \frac{S}{6};$$

$$S_{BFD} = S_{BDE} + S_{DEF} = S + \frac{S}{6} = \frac{7S}{6};$$

$$S_{CFD} = \frac{CD}{BD} \cdot S_{BFD} = \frac{2}{5} \cdot \frac{7S}{6} = \frac{7S}{15};$$

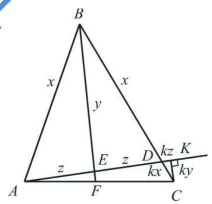
$$S_{CDEF} = S_{CFD} + S_{DEF} = \frac{7S}{15} + \frac{S}{6} = \frac{19S}{30},$$

откуда $\frac{S}{S_{CDEF}} = \frac{30}{19}$.

*Задачу можно решить иначе.*

***Решение.***

а) 1. По условию $AB = BD$, значит $\Delta ABD$ равнобедренный и $BE$ является медианой и высотой.




2. $\Delta AEB = \Delta DEB$ по трём сторонам: $AB = BK$ (по условию), $AE = ED$ ($BE$ – медиана), $BE$ – общая.

3. Пусть $AB = x$, $BE = y$, $AE = z$, тогда $BD = x$, $ED = z$.

4. $\Delta CKD$ подобен $\Delta BED$ по двум углам: $\angle CDK = \angle BDE$ (как вертикальные), $\angle CKD = \angle BED = 90^0$ ($BE$ – высота, $CK \perp AD$ по условию).

5. Из подобия $\Delta CKD$ и $\Delta BED$ следует, что

$$\frac{CD}{BD} = \frac{KD}{ED} = \frac{CK}{BE} = k,$$

где $k$ – коэффициент подобия, тогда:

$$\begin{aligned} CD &= k \cdot BD, \\ CK &= k \cdot BE, \\ KD &= k \cdot ED \end{aligned} \quad \text{или} \quad \begin{aligned} CD &= kx, \\ CK &= ky, \\ KD &= kz. \end{aligned}$$

6. Из справедливости равенств

$$\frac{AB}{BC} = \frac{AB}{BD + DC} = \frac{x}{x + kx} = \frac{1}{1 + k}$$

и

$$\frac{AE}{EK} = \frac{AE}{ED + DK} = \frac{z}{z + kz} = \frac{1}{1 + k}$$

получаем, что $\frac{AB}{BC} = \frac{AE}{EK}$.

б) 1. $\Delta ABE$ – прямоугольный, поэтому $S_{\Delta ABE} = \frac{1}{2} AE \cdot EB$, $S_{\Delta AEB} = \frac{1}{2} yz$.

2. $S_{CDEF} = S_{\Delta AKC} - S_{\Delta AEF} - S_{\Delta DKC}$.

3. Находим площади прямоугольных треугольников $AKC$ и $DKC$:

$$S_{\Delta AKC} = \frac{1}{2} AK \cdot KC, \quad S_{\Delta AKC} = \frac{1}{2} \cdot (2z + kz) \cdot ky = \frac{(2 + k)k}{2} yz,$$

$$S_{\Delta DKC} = \frac{1}{2} DK \cdot KC, \quad S_{\Delta DKC} = \frac{1}{2} \cdot kz \cdot ky = \frac{k^2}{2} yz.$$

4. $\Delta AEF$ подобен $\Delta AKC$ по двум углам: $\angle KAC$ – общий, (как вертикальные), $\angle AEF = \angle AKC = 90^0$ ($BE$ – высота).

5. Из подобия $\Delta AEF$ и $\Delta AKC$ имеем:

$$\frac{AE}{AK} = \frac{EF}{KC}, \quad \frac{z}{2z + kz} = \frac{EF}{ky}, \quad EF = \frac{k}{2 + k} y.$$

6. $\Delta AEF$ – прямоугольный, значит

$$S_{\Delta AEF} = \frac{1}{2} AE \cdot EF, \quad S_{\Delta AEF} = \frac{1}{2} \cdot z \cdot \frac{k}{2 + k} y = \frac{k}{2(2 + k)} yz.$$

7. $S_{CDEF} = \frac{(2+k)k}{2} yz - \frac{k}{2(2+k)} yz - \frac{k^2}{2} yz =$

$$= \frac{k}{2} yz \left(2 + k - \frac{1}{2 + k} - k\right) = \frac{k}{2} yz \left(2 + \frac{1}{2 + k}\right) =$$

$$= \frac{k}{2} yz \cdot \frac{4 + 2k - 1}{2 + k} = \frac{k}{2} yz \cdot \frac{2k + 3}{k + 2} = \frac{k(2k + 3)}{2(k + 2)} yz.$$

8 Отношение площадей треугольника $ABE$ и четырёхугольника $CDEF$ будет равно

$$\frac{S_{\Delta ABE}}{S_{CDEF}} = \frac{yz}{2} : \frac{k(2k + 3)yz}{2(k + 2)} = \frac{yz}{2} \cdot \frac{2(k + 2)}{k(2k + 3)yz} = \frac{k + 2}{k(2k + 3)}.$$

9. По условию задачи $\frac{BD}{DC} = \frac{5}{2}$ или $\frac{x}{kx} = \frac{5}{2}$, $\frac{1}{k} = \frac{5}{2}$, $k = \frac{2}{5}$, поэтому

$$\frac{S_{\Delta ABE}}{S_{CDEF}} = \frac{\frac{2}{5} + 2}{\frac{2}{5} \cdot \left(2 \cdot \frac{2}{5} + 3\right)} = \frac{\frac{12}{5}}{\frac{2}{5} \cdot \frac{19}{5}} = \frac{6 \cdot 5}{19} = \frac{30}{19}.$$

*Ответ:* б) $\frac{30}{19}$.

| Содержание критерия | Баллы |
|---|---|
| Имеется верное доказательство утверждения пункта *а* и обоснованно получен верный ответ в пункте *б* | 3 |
| Обоснованно получен верный ответ в пункте *б*<br>ИЛИ<br>имеется верное доказательство утверждения пункта *а* и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки | 2 |
| Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*,<br>ИЛИ<br>при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки<br>ИЛИ<br>обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен | 1 |
| Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше | 0 |
| *Максимальный балл* | 3 |

**Задание 17.**

Найдите все значения $a$, при каждом из которых уравнение

$$a^2 - ax - 2x^2 - 6a + 3x + 9|x| = 0$$

имеет четыре различных корня.

***Авторское решение.***

При $x \leq 0$ уравнение

$$a^2 - ax - 2x^2 - 6a + 3x + 9|x| = 0$$

принимает вид:

$$a^2 - ax - 2x^2 - 6a + 3x - 9x = 0;$$
$$a^2 - ax - 2x^2 - 6a - 6x = 0;$$
$$(a - 2x)(a + x) - 6(a + x) = 0;$$
$$(a - 2x - 6)(a + x) = 0.$$

Получившееся уравнение задаёт на плоскости $Oxa$ пару лучей: луч $l_1$ с началом в точке $(0; 6)$, совпадающий с прямой $a = 2x + 6$ при $x \leq 0$, и луч $l_2$ с началом в точке $(0; 0)$, совпадающий с прямой $a = -x$ при $x \leq 0$. Лучи $l_1$ и $l_2$ пересекаются в точке $(-2; -2)$.

При $x \geq 0$ уравнение

$$a^2 - ax - 2x^2 - 6a + 3x + 9|x| = 0$$

принимает вид:

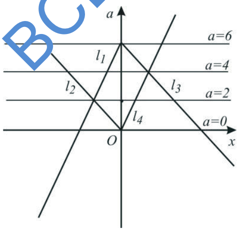
$$a^2 - ax - 2x^2 - 6a + 3x + 9x = 0;$$
$$a^2 - ax - 2x^2 - 6a + 12x = 0;$$

$$(a-2x)(a+x)-6(a-2x)=0;$$
$$(a-2x)(a+x-6)=0.$$

Получившееся уравнение задаёт на плоскости $Oxa$ пару лучей: луч $l_3$ с началом в точке $(0;6)$, совпадающий с прямой $a=6-x$ при $x \geq 0$, и луч $l_4$ с началом в точке $(0;0)$, совпадающий с прямой $a=2x$ при $x \geq 0$. Лучи $l_3$ и $l_4$ пересекаются в точке $(2;4)$.

Число корней исходного уравнения равно числу точек пересечения прямой $a=c$ с объединением лучей $l_1$, $l_2$, $l_3$ и $l_4$.

Каждый из лучей $l_1$ и $l_3$ пересекается с прямой $a=c$ в одной точке при $c \leq 6$ и не пересекается при $c > 6$.




Каждый из лучей $l_2$ и $l_4$ пересекается с прямой $a=c$ в одной точке при $c \geq 0$ и не пересекается при $c < 0$.

Следовательно, при $a < 0$ и $a > 6$ исходное уравнение имеет два различных корня.

При $c=0$, $c=2$, $c=4$ и $c=6$ прямая $a=c$ проходит через общую точку лучей $l_2$ и $l_4$, $l_1$ и $l_2$, $l_3$ и $l_4$, $l_1$ и $l_3$ соответственно.

Следовательно, при $a=0$, $a=2$, $a=4$ и $a=6$ исходное уравнение имеет ровно три корня, а при $0 < a < 2$, $2 < a < 4$ и $4 < a < 6$ имеет четыре различных корня.

*Задачу можно решить иначе. Приведём другое решение.*

***Решение.***

Рассмотрим два возможных случая: 1) $x \geq 0$, 2) $x < 0$.

1) Если $x \geq 0$, то исходное уравнение перепишется как:

$$a^2-ax-2x^2-6a+3x+9x=0,$$
$$-2x^2+12x-ax+a^2-6a=0,$$
$$2x^2-(12-a)x-(a^2-6a)=0. \qquad (1)$$

Решим это уравнение относительно переменной $x$:

$$D=\left(-(12-a)\right)^2-4\cdot 2\cdot\left(-(a^2-6a)\right)=$$
$$=(12-a)^2+8(a^2-6a)=144-24a+a^2+8a^2-48a=$$
$$=9a^2-72a+144=9(a^2-8a+16)=\left(3(a-4)\right)^2.$$

Квадратное уравнение имеет два различных решения, если дискриминант положителен. Очевидно, что $\left(3(a-4)\right)^2>0$ при всех $a \neq 4$, а у уравнения (1) будут два неравных корня:

$$x_1=\frac{12-a-3(a-4)}{2\cdot 2} \quad \text{и} \quad x_2=\frac{12-a+3(a-4)}{2\cdot 2},$$
$$x_1=\frac{12-a-3a+12}{4} \quad \text{и} \quad x_2=\frac{12-a+3a-12}{4},$$

$$x_1 = \frac{24 - 4a}{4} \quad \text{и} \quad x_2 = \frac{2a}{4},$$

$$x_1 = 6 - a \quad \text{и} \quad x_2 = \frac{a}{2}.$$

Полученные корни должны удовлетворять условию $x \geq 0$, то есть выполнены неравенства:

$$6 - a \geq 0 \quad \text{и} \quad \frac{a}{2} \geq 0,$$

$$a \leq 6 \quad \text{и} \quad a \geq 0.$$

Значит, при $a \in [0; 4) \cup (4; 6]$ уравнение (1) имеет два различных неотрицательных корня.

2) Если $x < 0$, то приведенное в условии уравнение будет следующим:

$$a^2 - ax - 2x^2 - 6a + 3x - 9x = 0,$$

$$-2x^2 - ax - 6x + a^2 - 6a = 0,$$

$$2x^2 + (a + 6)x - (a^2 - 6a) = 0. \qquad (2)$$

Для нахождения корней квадратного уравнения, вычислим его дискриминант:

$$D = (a + 6)^2 - 4 \cdot 2 \cdot \big(-(a^2 - 6a)\big) =$$

$$= (a + 6)^2 + 8(a^2 - 6a) = a^2 + 12a + 36 + 8a^2 - 48a =$$

$$= 9a^2 - 36a + 36 = 9(a^2 - 4a + 4) = \big(3(a - 2)\big)^2.$$

Дискриминант будет положителен при всех $a \neq 2$, а уравнение (2) иметь два различных корня:

$$x_3 = \frac{-(a + 6) - 3(a - 2)}{2 \cdot 2} \quad \text{и} \quad x_4 = \frac{-(a + 6) + 3(a - 2)}{2 \cdot 2},$$

$$x_3 = \frac{-a - 6 - 3a + 6}{4} \quad \text{и} \quad x_4 = \frac{-a - 6 + 3a - 6}{4},$$

$$x_3 = \frac{-4a}{4} \quad \text{и} \quad x_4 = \frac{2a - 12}{4},$$

$$x_3 = -a \quad \text{и} \quad x_4 = \frac{a - 6}{2}.$$

Выясним, при каких $a$ справедливо неравенство $x < 0$ для $x_3$ и $x_4$:

$$-a < 0 \quad \text{и} \quad \frac{a - 6}{2} < 0,$$

$$a > 0 \quad \text{и} \quad a < 6.$$

Таким образом, уравнение (2) имеет неравные отрицательные корни при $a \in (0; 2) \cup (2; 6)$.

Определим значения $a$ при которых совпадают корни уравнений (1) и (2), то есть выполняются равенства $x_1 = x_3$, $x_1 = x_4$, $x_2 = x_3$, $x_2 = x_4$.

$$\begin{array}{cccc}
6 - a = -a, & 6 - a = \dfrac{a - 6}{2}, & \dfrac{a}{2} = -a, & \dfrac{a}{2} = \dfrac{a - 6}{2}, \\
6 = 0 & 12 - 2a = a - 6 & a = -2a, & a = a - 6, \\
\text{(не верно)}, & 3a = 18, & 3a = 0, & 0 = -6, \\
 & a = 6, & a = 0, & \text{(не верно)}.
\end{array}$$

объединяя все имеющиеся ограничения на $a$, получаем, что исходное уравнение имеет четыре различных корня, если справедлива система:

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} 0 \le a < 4, \\ 4 < a \le 6, \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} 0 < a < 2, \\ 2 < a < 6, \end{array}\right. \\ a \ne 0, \\ a \ne 6 \end{cases} \quad \text{или} \quad a \in (0; 2) \cup (2; 4) \cup (4; 6).$$

*Ответ:* $0 < a < 2$; $2 < a < 4$; $4 < a < 6$.

| Содержание критерия | Баллы |
|---|---|
| Обоснованно получен верный ответ | 4 |
| С помощью верного рассуждения получено множество значений $a$, отличающееся от искомого только включением точки $a = 0$ и/или $a = 6$ | 3 |
| С помощью верного рассуждения получен промежуток $(0; 6)$ множества значений $a$, возможно, с включением граничных точек и/или исключением точек $a = 2$ и/или $a = 4$<br>ИЛИ<br>получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом верно выполнены все шаги решения | 2 |
| Задача сведена к исследованию взаимного расположения прямых (аналитически или графически) | 1 |
| Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше | 0 |
| *Максимальный балл* | 4 |

**Задание 19.**

Есть три коробки: в первой коробке 97 камней, во второй – 104, а в третьей коробке камней нет. За один ход берут по одному камню из любых двух коробок и кладут в оставшуюся. Сделали некоторое количество таких ходов.

а) Могло ли в первой коробке оказаться 97 камней, во второй – 89, а в третьей – 15?

б) Мог ли в третьей коробке оказаться 201 камень?

в) В первой коробке оказался 1 камень. Какое наибольшее число камней могло оказаться в третьей коробке?

***Авторское решение.***

а) Пусть 10 раз из первых двух коробок переложили камни в третью. Тогда в первой коробке оказалось 87 камней, во второй – 94 камня, а в третьей – 20 камней. Если после этого 5 раз переложить камни из второй и третьей коробок в первую, то в первой коробке окажется 97 камней, во второй – 89, а в третьей – 15.

б) Если в третьей коробке оказался 201 камень, то в первой и во второй коробках не осталось камней.

Пусть в какой-то момент в коробках оказалось $a$, $b$ и $c$ камней соответственно. Тогда после одного хода в коробках могло оказаться либо $a - 1$, $b - 1$ и $c + 2$ камня, либо $a - 1$, $b + 2$ и $c - 1$ камень, либо $a + 2$, $b - 1$ и $c - 1$ камень соответственно. Заметим, что разность между числами камней во второй и в первой коробках либо не изменилась, либо изменилась на 3. Сначала разность чисел камней во второй и в первой равнялась 7. Следовательно, ни в какой момент она не могла стать равной 0. Значит, в этих двух коробках всегда разное число камней. Следовательно, в третьей коробке не мог оказаться 201 камень.

в) В любой момент разность чисел камней во второй и в первой коробках равна $3k + 7$, где $k$ – целое число. Следовательно, если в первой коробке 1 камень, то во второй коробке $3k + 8$ камней. Значит, во второй коробке оказалось не меньше 2 камней, а в третьей коробке не больше 198 камней.

Покажем, как в третьей коробке могло оказаться 198 камней. Пусть 97 раз из первых двух коробок переложили камни в третью. Тогда в первой коробке оказалось 0 камней, во второй – 7 камней, а в третьей – 194 камня. Если после этого 2 раза переложить камни из второй и третьей коробок в первую, то в первой коробке окажется 4 камня, во второй – 5, а в третьей – 192. Если после этого 3 раза переложить камни из первых двух коробок в третью, то в первой коробке окажется 1 камень, во второй – 2 камня, а в третьей – 198 камней.

*Задачу можно решить другим способом.*

***Решение.***

По условию задачи первоначальное количество камней в трёх коробках: в первой коробке – 97 камней, во второй – 104 камня, в третьей коробке – нет камней. За один ход берут по одному камню из любых двух коробок и кладут в оставшуюся.

Пусть число перекладываний в первую, вторую и третью коробки, соответственно, $k$, $m$ и $n$ ($k$, $m$, $n$ – целые неотрицательные числа). После того, как было сделано несколько ходов в первой коробке окажется $97 + 2k - n - m$ камней, во второй – $104 + 2m - k - n$ камней и в третьей – $0 + 2n - k - m$ камней.

а) По условию задачи в первой коробке должно оказаться 97 камней, во второй – 89 камней, а в третьей – 15 камней. Можем составить систему:

$$\begin{cases} 97 + 2k - n - m = 97, \\ 104 + 2m - k - n = 89, \\ 0 + 2n - k - m = 15 \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} 2k - n - m = 0, \\ k + n - 2m = 15, \\ 2n - k - m = 15. \end{cases} \quad (1)$$

Вычтем из третьего уравнения первое:

$$2n - k - m - (2k - n - m) = 0,$$

$$3n - 3k = 15,$$

$$n - k = 5,$$

$$n = k + 5.$$

Подставим $n = k + 5$ во второе уравнение системы (1):

$$k + k + 5 - 2m = 15,$$

$$2k - 2m = 10,$$

$$k - m = 5,$$

$$m = k - 5.$$

Так как, $m$ – целое неотрицательное число, то $k - 5 \geq 0$, а значит $k \geq 5$.

Если $k = 5$, то $m = 0$, $n = 10$.

Итак, если 10 раз переложить камни из первой и второй коробки в третью, то получим следующий состав камней: первая коробка – 87 камней, вторая коробка – 94 камня, третья коробка – 20 камней. Затем, если 5 раз переложить камни из второй и третьей коробки в первую, то в коробках окажется: первая коробка – 97 камней, вторая коробка – 89 камней, третья коробка – 15 камней.

б) Рассмотрим случай *б*. По условию задачи в трёх коробках изначально находится $97 + 104 + 0 = 201$ камень, а значит, после выполнения некоторого числа ходов в первой и второй коробках камней не будет, а в третьей – 201 камень.

Составим систему уравнений:

$$\begin{cases} 97 + 2k - n - m = 0, \\ 104 + 2m - k - n = 0, \\ 0 + 2n - k - m = 201 \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} n + m - 2k = 97, \\ k + n - 2m = 104, \\ 2n - k - m = 201. \end{cases} \quad (2)$$

Рассмотрим систему (2). Вычитая из второго уравнения системы первое, получаем:

$$k + n - 2m - (n + m - 2k) = 104 - 97,$$

$$3k - 3m = 7,$$

$$3k = 3m + 7,$$

$$k = \frac{3m + 7}{3},$$

$$k = m + \frac{7}{3}.$$

Очевидно, что данное уравнение не имеет решений в целых числах. Следовательно, невозможно выполняя условия задачи получить в третьей коробке 201 камень.

в) Рассмотрим случай *в*. Пусть в третьей коробке после нескольких ходов оказалось $l$ камней, тогда во второй коробке находится $200 - l$ камней. Составим систему уравнений, соответствующей тому, что в первой коробке останется 1 камень, во второй коробке – $200 - l$ камней, а в третьей – $l$ камней:

$$\begin{cases} 97 + 2k - n - m = 1, \\ 104 + 2m - k - n = 200 - l, \\ 0 + 2n - k - m = l \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} n + m - 2k = 96, \\ 2m - k - n = 96 - l, \\ 2n - k - m = l. \end{cases} \quad (3)$$

Рассмотрим систему (3). Сложив два первых уравнения системы, получаем:

$$n + m - 2k + 2m - k - n = 96 + 96 - l,$$

$$3m - 3k = 192 - l,$$

$$m - k = \frac{192 - l}{3},$$

$$m - k = 64 - \frac{l}{3}.$$

По условию задачи $k$, $m$, $n$ – целые неотрицательные числа, поэтому $l$ должно быть числом, кратным трём, не превосходящим 200. Очевидно, что наибольшее число, удовлетворяющее этому условию – 198.

Запишем систему (3) для $l = 198$:

$$\begin{cases} 97 + 2k - n - m = 1, \\ 104 + 2m - k - n = 2, \\ 0 + 2n - k - m = 198 \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} n + m - 2k = 96, \\ k + n - 2m = 102, \\ 2n - k - m = 198. \end{cases} \quad (4)$$

Вычтем из второго уравнения первое и получим:

$$k + n - 2m - (n + m - 2k) = 102 - 96,$$

$$3k - 3m = 6,$$

$$k - m = 2,$$

$$k = m + 2.$$

Подставим $k = m + 2$ в третье уравнение системы (4). Имеем:

$$2n - (m + 2) - m = 198,$$

$$2n - 2m = 200,$$

$$n - m = 100,$$

$$n = m + 100.$$

Выберем $m = 0$, тогда $k = 2$ и $n = 100$.

Убедимся, что можно получить 198 камней в третьей коробке.

Вначале 97 раз переложим камни из первой и второй коробки в третью. В результате в первой коробке камней не будет, во второй коробке останется 7 камней, а в третьей окажется 194 камня.

Затем переложим 2 раза камни из второй и третьей коробок в первую. В первой коробке окажется 4 камня, во второй – 5 камней, в третьей – 192 камня.

После этого 3 раза переложим камни из первой и второй коробки в третью. В результате получим: в первой коробке – 1 камень, во второй коробке – 2 камня, в третьей коробке – 198 камней.

*Ответ:* а) да; б) нет; в) 198.

| **Содержание критерия** | **Баллы** |
|---|---|
| Обосновано получены верные ответы в пунктах *а, б* и *в* | 4 |
| Обосновано получен верный ответ в пункте *в* и обосновано получен верный ответ в пункте *а* или *б* | 3 |
| Обосновано получены верные ответы в пунктах *а* и *б*<br>ИЛИ<br>обосновано получен верный ответ в пункте *в* | 2 |
| Обосновано получен верный ответ в пункте *а* или *б* | 1 |
| Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше | 0 |
| *Максимальный балл* | 4 |

## 2.5. Рекомендации по совершенствованию организации и методики преподавания предмета на основе выявленных типичных затруднений и ошибок ЕГЭ (профильный уровень)

Результаты экзамена по математике на профильном уровне позволили выявить ряд проблем, которые необходимо учитывать при обучении математике и подготовке обучающихся к итоговой аттестации в формате ЕГЭ.

Важным условием успешной подготовки к экзамену является тщательность в отслеживании результатов учеников по всем темам и в своевременной коррекции уровня усвоения учебного материала. Одним из принципов построения методической подготовки к итоговой аттестации считается принцип «жесткого ограничения времени» при выполнении заданий с кратким ответом. В целях эффективного использования времени на экзамене, нужно также учить школьников приемам быстрого и рационального счета. А также формирование читательской грамотности при работе с текстом как основной составляющей функциональной грамотности обучающихся: работа с рисунками, схемами, графиками, текстом, применении знаний на практике. Уделять внимание обучению работы с вопросами, вычленению ключевых теорий, на базе которых строятся ответы.

При формировании методологических понятий необходимо раскрывать структуру научной теории, ее объект и предмет, основание, следствие и границы применимости.

Низкий процент выполнения геометрических заданий, свидетельствует о сохраняющихся системных недостатках в преподавании геометрии в основной школе. Также причиной является рассмотрение лишь тех типов задач, которые встречались на экзамене в предыдущие годы, вместо полноценного изучения геометрии. Таким образом, следует рекомендовать при подготовке к экзамену особое внимание уделить формированию и развитию умений выполнять действия с геометрическими фигурами, предлагать задания с разными числовыми данными по одному рисунку, предлагать задания где необходимо определять различные элементы фигуры и/или вычислить их числовые характеристики, уделять больше внимания развитию умения верно пользоваться геометрическим чертежом, добиваться достаточного уровня владением теоретическим материалом.

При подготовке к экзамену особое внимание уделять решению задач, в которых необходимо составить математическую модель в виде уравнения или системы уравнений. Не менее важно отрабатывать навыки решения различных типов уравнений, встречающихся при решении подобного вида задач.

При подготовке к экзамену учить школьников в полном объёме исследованию функции с помощью производной.

Несмотря на рост показателей выпускников, получивших полный балл за решение задания 15 (профильный уровень), следует рекомендовать при подготовке к экзамену обратить внимание на формирование вычислительных навыков учащихся, а также корректное использование данных задачи при составлении математической модели.

При подготовке к экзамену обратить внимание: на корректное выполнение всех преобразований необходимых при решении заданий высокого уровня сложности 17 - 18; на формирование математической культуры при решении задач, требующих доказательства или обоснования доказываемого утверждения или факта.

Анализируя результаты, полученные выпускниками за решение задач 17 и 18 (профильный уровень) за последние три года, следует отметить, что процент выполнения заданий высокого уровней сложности, предполагающих свободное владение материалом курса математики, находится в регионе на невысоком уровне. Низкий процент выполнения подобных заданий свидетельствует о сохраняющихся системных недостатках в преподавании математики как в основной школе, так и в старшей школе. Как правило, причиной является рассмотрение лишь тех типов задач, которые встречались на экзамене в предыдущие годы, вместо полноценного изучения методов решения заданий с параметром и ознакомления с методами решения олимпиадных задач.

Анализируя результаты выпускников, следует рекомендовать при подготовке к экзамену обратить внимание: на корректное выполнение всех преобразований необходимых при решении заданий; на формирование математической культуры при решении задач, требующих доказательства или обоснования доказываемого утверждения или факта. Также рекомендуется обратить внимание на соответствующую подготовку учителей, которые осуществляют обучение учащихся старших классов.

Одним из условий успешного обучения математике является правильный выбор учебника математики, при этом следует руководствоваться приказами Министерства Просвещения РФ «Об утверждении федерального перечня учебников, рекомендуемых к использованию при реализации имеющих государственную аккредитацию образовательных программ начального общего, основного общего, среднего общего образования» № 254 от 20 мая 2020г. и № 766 от 23.12.2020. При выборе УМК следует обратить внимание на преемственность в обучении математике в курсах начальной, основной и старшей школы.

В сложившихся условиях (дистанционное обучение, онлайн обучение) рекомендуется использовать возможности сетевого взаимодействия с обучающимися, организовать изучение тем и итоговое повторение на основе интерактивных уроков, используя образовательные платформы (https://эдо.образование33.рф и др.).

На основании вышеизложенного, **рекомендуем** педагогам проанализировать результаты государственной итоговой аттестации по математике на заседаниях городских (районных) методических объединений учителей математики; планировать работу на 2022-2023 учебный год с учетом:

- изучения нормативных документов Министерства Просвещения РФ, методических писем и рекомендаций ФИПИ http://www.fipi.ru/. В данных письмах и рекомендациях указаны нормативные требования к проведению ЕГЭ, характеристика контрольных измерительных материалов по математике, рекомендации по использованию и интерпретации результатов выполнения экзаменационных работ;

- использования «Открытый банк заданий ЕГЭ. Математика», созданного авторским коллективом ФИПИ с целью подготовки учащихся к итоговой аттестации http://www.fipi.ru/;

- использование банка заданий по формированию математической грамотности ИСРО РАО http://skiv.instrao.ru/bank-zadaniy/matematicheskaya-gramotnost/;

- увеличения количества часов на изучение математики из части учебного плана, самостоятельно формируемой участниками образовательных отношений и (или) предусмотреть включение в учебный план общеобразовательной организации элективных курсов, направленных на подготовку обучающихся к сдаче государственной итоговой аттестации в 11 классах;

- выявление проблемных тем теоретического материала по математики за курс основной и старшей школы; организация индивидуальных и групповых занятий по восполнению пробелов в знаниях отдельных теоретических вопросов курса математики; на занятиях спецкурсов, консультациях продолжить отработку навыков практического применения теории; на уроках повторения пройденного материала уделить особое внимание вопросам и заданиям, вызвавшим затруднения у школьников;

- закрепление навыков смыслового чтения и анализа текста заданий (типа 17, 18), т.к. у обучающихся недостаточно сформированы как читательская грамотность, так и умения использовать приобретённые знаний в практической деятельности и повседневной жизни;

- усиление внимания к геометрическим задачам на решение и доказательство; необходимо обратить самое внимание на изучение геометрии – непосредственно с 7 класса, когда начинается систематическое изучение этого предмета. Подготовку выпускников следует начинать не с рассмотрения примеров решения геометрических задач вариантов ЕГЭ, а с изучения свойств геометрических фигур и их элементов. Задачи необходимо решать по темам, например, «Треугольник и его элементы» и т.д.;

- проведение анализа условий задачи, искать пути решения, применять известные алгоритмы в измененной ситуации (стандартные методы решения простейших уравнений и неравенств, преобразование алгебраических выражений, свойства геометрических фигур при решении планиметрических и стереометрических задач);

- рассмотрение разобранных методов решения задач с параметрами и задач экономическим содержанием;

- усиление работы по повышению уровня вычислительных навыков учащихся (например, с помощью устной работы на уроках: применение арифметических законов действий при работе с рациональными числами, свойства степеней, корней и др.), что позволит им успешно выполнить задания, избежав досадных ошибок, применяя рациональные методы вычислений;

- повышение мотивации учащихся к самостоятельному изучению дополнительного материала, без которого трудно решить задания повышенного и высокого уровня сложности;

- отработка у обучающихся быстрое и правильное выполнение заданий Части 1, постоянно контролировать умения, необходимые для выполнения заданий базового уровня;

- организация дифференцированного подхода с наиболее подготовленными учащимися для успешного выполнения заданий Части 2. Это относится и к работе на уроке, и к дифференциации домашних заданий и заданий, предлагающихся обучающимся на контрольных, проверочных, диагностических работах.

Отбор учебного материала для повторения и закрепления изученного учебного материала необходимо осуществлять с учетом уровня подготовки обучающихся, уделяя наибольшее внимание традиционно сложным для усвоения темам. При этом целесообразно применять дифференцированный подход, при котором следует разделить обучающихся на группы:

- мотивированным обучающимся, полноценно усвоившим учебный материал, предлагать дополнительные вопросы, расширяющие содержание ранее изученного материала, тренировочные варианты для выполнения, проводить консультации по возникающим вопросам;

- обучающимся, допускающим индивидуальные ошибки при выполнении заданий КИМ работать над повторением и закреплением теории трудных тем, отработкой групп заданий из Открытого банка (Методические рекомендации для обучающихся по организации индивидуальной подготовки к ЕГЭ по учебному предмету, представленных на официальном сайте ФИПИ http://www.fipi.ru/);

- обучающимся, с низким уровнем мотивации, испытавшим затруднения при усвоении ранее изученных тем, предлагать задания на повторение и закрепление ранее изученного материала, отработать задания до автоматизма из «Открытого банка заданий ЕГЭ. Математика» (необходимо определить количество и тип заданий, выполнение которых обеспечит преодоление минимального порога).

По организации дифференцированного обучения школьников с разными уровнями предметной подготовки необходимо сделать акцент на индивидуальные особенности учащихся и включить в методическую работу поэтапное дифференцированное обучение:

- диагностический этап: первичная диагностика, которая позволит определить имеющийся уровень сформированности знаний, умений, навыков по предмету, а также сформированность предметных и метапредметных УУД обучающихся;

- содержательно-методический: выстраивание индивидуальной траектории по подготовке к ГИА, исходя из уровня подготовки обучающихся. Разработка теоретических и практических занятий, направленных на совершенствование и повышение уровня; разработка самооценочных диагностических инструментов, которые позволяют учащимся самостоятельно выстраивать свой образовательный маршрут. Предполагает организацию педагогического взаимодействия учитель-ученик (группа учеников);

- рефлексивный: обеспечение промежуточного контроля уровни готовности учащихся к сдаче экзамена по математике и корректировка индивидуального образовательного маршрута.

Одним из условий, влияющим на успешную подготовку к ЕГЭ по математике на профильном уровне, является реализация индивидуального подход в работе с учеником, планирующим сдавать экзамен. Для этого может быть использован график, который отражает порядок прохождения тем и результаты усвоения изученного материала, в том числе и выполнения заданий. Важнейшим фактором, определяющим успешную сдачу экзамена, является также формирование метапредметных результатов обучения.

Согласно ФГОС СОО, должны быть достигнуты не только предметные, но и метапредметные результаты обучения, в том числе способность и готовность к самостоятельному поиску методов решения практических задач.

Достижения этих результатов влияет на успешность выполнения заданий КИМ по математике на профильном уровне. Например, задание 15 - решение прикладной математической, экономический задачи, при решении которой необходимо построить математическую модель конкретной ситуации и провести ее исследование. В этом задании усилена сюжетная, практико-ориентированная составляющая условия:

*В июле 2026 года планируется взять кредит на три года в размере* 800 *тыс. рублей. Условия его возврата таковы:*

*– каждый январь долг будет возрастать на* 20% *по сравнению с концом предыдущего года;*

*– с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга;*

*– платежи в 2027 и 2028 годах должны быть равными;*

*– к июлю 2029 года долг должен быть выплачен полностью.*

*Известно, что сумма всех платежей после полного погашения кредита будет равна* 1254,4 *тыс. рублей. Сколько рублей составит платёж 2027 года?*

Сравнивая показатели учащихся за последние три года, которые верно составили математическую модель, исследовали ее, пришли к правильному ответу и получили полный балл за решение задания, отмечаем, что имеется значительное увеличение результатов выполнения данного задания в 2022 г. (23,4%) как по отношению к результатам 2020 г. (5,3%), так и результатам 2021 г. (19,0%).

При выполнении практико-ориентированных задач, затруднения у обучающихся вызывают: способность моделировать, анализировать и преобразовывать информацию, интерпретировать полученные результаты.

Следовательно, учителю необходимо формировать у обучающихся опыт поиска путей решения жизненных задач, учить математическому моделированию реальных ситуаций и переносить способы решения учебных задач на реальные объекты. В каждой теме в соответствии с кодификатором содержания выполнять задания, построенные на реальных жизненных сюжетах. Акцент – на обсуждение: обсуждение ситуации, выявление математических аспектов, всех данных, переформулирование и моделирование объектов, перевод на язык математики, обсуждение ограничений, допущений, различные способы решения, обсуждение их рациональности; обсуждение результатов: оценка и интерпретация, соотнесение с ситуацией.

Рекомендации по темам для обсуждения на методических объединениях учителей математики:

– Результаты ЕГЭ по математике на профильном уровне в 2022 году.

– Анализ типичных ошибок заданий с кратким ответом базового, повышенного и высокого уровня сложности.

– Анализ типичных ошибок заданий с развернутым решением (задания 12-18).

– КИМ по математике на профильном уровне в 2023 г.

– Особенности оценивания заданий с развернутым ответом КИМ ЕГЭ по математике в 2023 г.

– Методы и приемы решения математических задач повышенной и высокой сложности: с экономическим содержанием, с параметром, задачи олимпиадного характера.

– Методы и приемы геометрических задач: планиметрических и стереометрических.

– Использование интернет-ресурсов, дистанционных образовательных технологий в образовательной практике учителей математики.

– Формирование функциональной грамотности школьников, в том числе читательской и математической.

# ЧАСТЬ III.
# ИТОГИ ОГЭ ПО МАТЕМАТИКЕ ВО ВЛАДИМИРСКОЙ ОБЛАСТИ В 2022 ГОДУ

## 3.1. Основные результаты ОГЭ по математике

**Количество участников ОГЭ по математике по категориям**

*Таблица 1*

| Участники ОГЭ | 2018 г. | | 2019 г. | | 2021 г. | | 2022 г. | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | чел. | % | чел. | % | чел. | % | чел. | % |
| Выпускники текущего года, обучающиеся по программам ООО | 11628 | 91,8 | 12378 | 93,2 | 12394 | 95,5 | 12536 | 99,9 |
| Выпускники лицеев и гимназий | 767 | 6,1 | 852 | 6,42 | 881 | 6,8 | 988 | 7,9 |
| Выпускники СОШ | 9716 | 76,7 | 10319 | 77,8 | 10357 | 79,8 | 10365 | 82,7 |
| Обучающиеся на дому | 1 | 0,01 | 15 | 0,11 | 17 | 0,13 | 37 | 0,3 |
| Участники с ограниченными возможностями здоровья | 33 | 0,3 | 36 | 0,3 | 49 | 0,4 | 46 | 0,4 |

***ВЫВОДЫ о характере изменения количества участников ОГЭ по математике:***

Следует отметить динамику роста количества участников ОГЭ по математике за последний год. Так в 2022 году экзамен по математике сдавало на 142 человека больше по сравнению с 2021 годом и больше на 158 человек по сравнению с 2019 годом.

Выпускников текущего года, обучающихся по программам основного общего образования в средней общеобразовательной школе больше, чем выпускников других типов ОО. Их процент от общего числа участников составляет 82,67%. Доля выпускников гимназий и лицеев составляет 7,88%, на 1,1% больше, чем в 2021 году.

Значительно (более чем в 2 раза) выросло число участников ОГЭ, обучающихся на дому: с 15 чел. в 2019 году до 37 – в 2022.

Количество участников ОГЭ с ограниченными возможностями здоровья в 2022 году осталось на уровне 2021 года.

Самое большое количество участников ОГЭ по математике в гг. Владимир (3205 чел.), Ковров (1164 чел.), Муром (1061 чел.), Александровском районе (1038 чел.). Это можно объяснить тем, что данные АТЕ являются самыми крупными во Владимирской области.

**Диаграмма распределения первичных баллов участников ОГЭ по математике в 2022 г.** *(количество участников, получивших тот или иной балл)*


**Динамика результатов ОГЭ по математике**

*Таблица 2*

| Получили отметку | 2018 г. | | 2019 г. | | 2021 г. | | 2022 г. | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | чел. | % | чел. | % | чел. | % | чел. | % |
| «2» | 15 | 0,13 | 21 | 0,17 | 691 | 5,57 | 617 | 4,92 |
| «3» | 5823 | 50,08 | 6102 | 49,29 | 7532 | 60,77 | 7669 | 61,18 |
| «4» | 4230 | 36,38 | 5133 | 41,47 | 3361 | 27,12 | 3801 | 30,32 |
| «5» | 1560 | 13,41 | 1122 | 9,07 | 810 | 6,54 | 449 | 3,58 |

**Результаты ОГЭ по МСУ региона**

*Таблица 3*

| Муниципалитеты | Всего чел. | Получили оценку | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | «2» | | «3» | | «4» | | «5» | |
| | | чел. | % | чел. | % | чел. | % | чел. | % |
| г.Владимир | 3205 | 186 | 5,80 | 1730 | 53,98 | 1114 | 34,76 | 175 | 5,46 |
| г.Гусь-Хрустальный | 587 | 2 | 0,34 | 380 | 64,74 | 173 | 29,47 | 32 | 5,45 |
| г.Ковров | 1164 | 32 | 2,75 | 700 | 60,14 | 384 | 32,99 | 48 | 4,12 |
| о.Муром | 1061 | 71 | 6,69 | 636 | 59,94 | 310 | 29,22 | 44 | 4,15 |
| г.Радужный | 162 | 5 | 3,09 | 96 | 59,26 | 53 | 32,72 | 8 | 4,94 |
| Александровский район | 1038 | 7 | 0,67 | 727 | 70,04 | 273 | 26,30 | 31 | 2,99 |
| Вязниковский район | 642 | 68 | 10,59 | 426 | 66,36 | 136 | 21,18 | 12 | 1,87 |
| Гороховецкий район | 174 | 8 | 4,60 | 122 | 70,11 | 40 | 22,99 | 4 | 2,30 |
| Гусь-Хрустальный район | 427 | 9 | 2,11 | 302 | 70,73 | 113 | 26,46 | 3 | 0,70 |
| Камешковский район | 244 | 24 | 9,84 | 153 | 62,70 | 61 | 25,00 | 6 | 2,46 |
| Киржачский район | 386 | 48 | 12,44 | 232 | 60,10 | 100 | 25,91 | 6 | 1,55 |
| Ковровский район | 236 | 5 | 2,12 | 175 | 74,15 | 51 | 21,61 | 5 | 2,12 |
| Кольчугинский район | 448 | 18 | 4,02 | 286 | 63,84 | 121 | 27,01 | 23 | 5,13 |
| Меленковский район | 300 | 29 | 9,67 | 208 | 69,33 | 58 | 19,33 | 5 | 1,67 |
| Муромский район | 94 | 0 | 0,00 | 58 | 61,70 | 33 | 35,11 | 3 | 3,19 |
| Петушинский район | 598 | 45 | 7,53 | 300 | 50,17 | 246 | 41,14 | 7 | 1,17 |
| Селивановский район | 123 | 2 | 1,63 | 79 | 64,23 | 38 | 30,89 | 4 | 3,25 |

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Собинский район | 527 | 22 | 4,17 | 325 | 61,67 | 171 | 32,45 | 9 | 1,71 |
| Судогодский район | 333 | 3 | 0,90 | 201 | 60,36 | 121 | 36,34 | 8 | 2,40 |
| Суздальский район | 407 | 24 | 5,90 | 264 | 64,86 | 110 | 27,03 | 9 | 2,21 |
| Юрьев-Польский район | 282 | 8 | 2,84 | 217 | 76,95 | 54 | 19,15 | 3 | 1,06 |
| НОУ | 98 | 1 | 1,02 | 52 | 53,06 | 41 | 41,84 | 4 | 4,08 |
| **ИТОГО** | **12536** | **617** | **4,92** | **7669** | **61,18** | **3801** | **30,32** | **449** | **3,58** |

**Результаты по группам участников экзамена с различным уровнем подготовки с учетом типа ОО**

*Таблица 4*

| Тип ОО | Доля участников, получивших отметку | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | «2» | «3» | «4» | «5» | «4» и «5» (качество обучения) | «3», «4» и «5» (уровень обученности) |
| Гимназии | 1,66 | 43,35 | 45,57 | 9,42 | 54,99 | 98,34 |
| Интернаты | 0 | 36,36 | 54,55 | 9,09 | 63,64 | 100 |
| Кадетский корпус | 0 | 72,22 | 27,78 | 0 | 27,78 | 100 |
| Лицеи | 4,51 | 55,26 | 36,09 | 4,14 | 40,23 | 95,49 |
| ООШ | 7,28 | 69,56 | 22,11 | 1,05 | 23,16 | 92,72 |
| СОШ | 4,94 | 61,63 | 29,99 | 3,44 | 33,43 | 95,06 |

**ВЫВОДЫ о характере результатов ОГЭ по математике в 2022 году:**

- Анализ выполненных экзаменационных работ показывает, что не преодолели минимальный порог 4,92% учащихся (2021 г. – 5,57%). Наибольшая доля выпускников, не справившихся с работой, в Вязниковском – 10,59%; Киржачском – 12,44%; Меленковском – 9,67% районах;
- 95,08% обучающихся (2021 г. – 94,42%) подтвердили освоение основной образовательной программы по математике в соответствии с требованиями федерального государственного образовательного стандарта основного общего образования;
- Получили оценку: «5» - 449 чел.- 3,58%; «4»- 3801 чел.- 30,32%; «3»- 7669 чел.- 61,18%; «2»- 617 чел. – 4,92%. Результат 2022 года оказался выше результата экзамена 2021 г., но незначительно ниже результатов 2018, 2019 г.г. Скорее всего на результат повлияло дистанционное обучение 2020 – 2022 г.г.;
- Наибольшая доля выпускников, получивших оценку «5», в городах: Владимир – 5,46%, Гусь-Хрустальный – 5,45% и Кольчугинском районе – 5,13%. Хотя данный показатель ниже показателей прошлых лет;
- Самое высокое качество подготовки показали выпускники НОУ- 45,92%; Петушинского района – 42,13% и г. Владимира – 40,22%.

## 3.2. Анализ типичных ошибок участников ОГЭ по математике

КИМ по математике на основе спецификации КИМ ОГЭ, содержал набор задач аналогичных представленных в демонстрационном варианте. Типы и содержание экзаменационных задач с кратким ответом соответствовали задачам демонстрационного варианта (Часть 1). Второй год в КИМ включён новый блок практико-ориентированных заданий 1–5, направленные на проверку функциональной грамотности школьников. Уровень сложности экзаменационных задач с развернутым ответом №20-25 (Часть 2) соответствовал аналогичным задачам демонстрационного варианта.

КИМ ОГЭ 2022 года не изменен в сравнении с КИМ 2021 года и содержал ряд изменений в сравнении с 2018 и 2019 г.г., которые представлены в спецификации КИМ на сайте ФИПИ http://www.fipi.ru/.

В таблице 5 используется обобщенный план КИМ по предмету с указанием средних процентов выполнения по каждой линии заданий в регионе

*Таблица 5*

| № | Проверяемые элементы содержания / умения | Уровень сложности задания | Средний процент выполнения | Процент выполнения по региону в группах, получивших отметку | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | «2» | «3» | «4» | «5» |
| 1 | Уметь выполнять вычисления и преобразования, уметь использовать приобретённые знания и умения в практической деятельности и повседневной жизни, уметь строить и исследовать простейшие математические модели | Б | **88,2** | 51,4 | 85,6 | 98,1 | 98,8 |
| 2 | Уметь выполнять вычисления и преобразования, уметь использовать приобретённые знания и умения в практической деятельности и повседневной жизни, уметь строить и исследовать простейшие математические модели | Б | **55,8** | 11,9 | 47,0 | 76,8 | 88,8 |
| 3 | Уметь выполнять вычисления и преобразования, уметь использовать приобретённые знания и умения в практической деятельности и повседневной жизни, уметь строить и исследовать простейшие математические модели | Б | **54,7** | 4,5 | 40,6 | 86,7 | 95,8 |
| 4 | Уметь выполнять вычисления и преобразования, уметь использовать приобретённые знания и умения в практической деятельности и повседневной жизни, уметь строить и исследовать простейшие математические модели | Б | **23,7** | 1,5 | 11,9 | 45,1 | 77,0 |
| 5 | Уметь выполнять вычисления и преобразования, уметь использовать приобретённые знания и умения в практической деятельности и повседневной жизни, уметь строить и исследовать простейшие математические модели | Б | **61,2** | 25,4 | 50,9 | 83,8 | 96,9 |
| 6 | Уметь выполнять вычисления и преобразования | Б | **79,2** | 13,2 | 75,4 | 95,3 | 98,2 |

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 7 | Уметь выполнять вычисления и преобразования | Б | **88,4** | 39,1 | 86,7 | 98,6 | 99,8 |
| 8 | Уметь выполнять вычисления и преобразования, уметь выполнять преобразования алгебраических выражений | Б | **59,5** | 7,4 | 51.2 | 80,4 | 97,1 |
| 9 | Уметь решать уравнения, неравенства и их системы | Б | **64,9** | 9,4 | 55,1 | 89,7 | 98,9 |
| 10 | Уметь работать со статистической информацией, находить частоту и вероятность случайного события, уметь использовать приобретённые знания и умения в практической деятельности и повседневной жизни, уметь строить и исследовать простейшие математические модели | Б | **74,0** | 11,9 | 67,5 | 94,4 | 97,3 |
| 11 | Уметь строить и читать графики функций | Б | **64,0** | 22,0 | 56,0 | 83,2 | 94,2 |
| 12 | Осуществлять практические расчеты по формулам, составлять несложные формулы, выражающие зависимости между величинами | Б | **68,7** | 10,0 | 60,3 | 91,6 | 98,9 |
| 13 | Уметь решать уравнения, неравенства и их системы | Б | **61,9** | 25,0 | 51,0 | 85,6 | 97,5 |
| 14 | Уметь использовать приобретённые знания и умения в практической деятельности и повседневной жизни, уметь строить и исследовать простейшие математические | Б | **61,0** | 28,3 | 53,4 | 78,0 | 92,2 |
| 15 | Уметь выполнять действия с геометрическими фигурами, координатами и векторами | Б | **84,6** | 22,3 | 82,6 | 97,1 | 98,7 |
| 16 | Уметь выполнять действия с геометрическими фигурами, координатами и векторами | Б | **46,2** | 7,4 | 37,4 | 64,8 | 91,5 |
| 17 | Уметь выполнять действия с геометрическими фигурами, координатами и векторами | Б | **67,8** | 13,1 | 58,3 | 92,6 | 98,0 |
| 18 | Уметь выполнять действия с геометрическими фигурами, координатами и векторами | Б | **86,4** | 28,8 | 84,7 | 97,7 | 100,0 |
| 19 | Проводить доказательные рассуждения при решении задач, оценивать логическую правильность рассуждений, распознавать ошибочные заключения | Б | **61,2** | 21,2 | 53,0 | 80,3 | 94,9 |

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 20 | Уметь выполнять преобразования алгебраических выражений, решать уравнения, неравенства и их системы | П | **7,0** | 0,0 | 0,3 | 12,9 | 81,7 |
| 21 | Уметь выполнять преобразования алгебраических выражений, решать уравнения, неравенства и их системы, строить и читать графики функций, строить и исследовать простейшие математические модели | П | **9,3** | 0,0 | 0,7 | 19,9 | 79,6 |
| 22 | Уметь выполнять преобразования алгебраических выражений, решать уравнения, неравенства и их системы, строить и читать графики функций, строить и исследовать простейшие математические модели | В | **1,4** | 0,0 | 0,0 | 1,1 | 28,3 |
| 23 | Уметь выполнять действия с геометрическими фигурами, координатами и векторами | П | **3,5** | 0,0 | 0,1 | 4,6 | 57,7 |
| 24 | Проводить доказательные рассуждения при решении задач, оценивать логическую правильность рассуждений, распознавать ошибочные заключения | П | **2,1** | 0,0 | 0,0 | 2,1 | 40,4 |
| 25 | Уметь выполнять действия с геометрическими фигурами, координатами и векторами | В | **0,2** | 0,0 | 0,01 | 5,9 | |

Анализ выполнения заданий с кратким ответом Части 1 показывает, что учащиеся справились с заданиями базового уровня 1-19 от 23,7% до 88,4% (в 2021 году 25,5% до 81,1%). В 2019 году этот результат был выше от 31,4% до 91,5%. (В 2020 году экзамен не проводился из-за эпидемиологической обстановки, вызванной короновирусной инфекцией). Таким образом, результаты экзамена 2021 и 2022 г.г. демонстрируют недостаточную подготовку основной массы обучающихся к итоговой аттестации в формате ОГЭ.

Задания базового уровня, с процентом выполнения ниже 50 – это № 4 (23,7%, уметь выполнять вычисления и преобразования, уметь использовать приобретённые знания и умения в практической деятельности и повседневной жизни, уметь строить и исследовать простейшие математические модели) и № 16 (46,2%, уметь выполнять действия с геометрическими фигурами).

Процент выполнения заданий с развернутым ответом Части 2 (задания 20-25) составил от 0,2% до 9,3% (в 2021 году от 0,1% до 12,4% по всем вариантам, использованным в регионе). В сравнении с 2019 годом этот результат оказался ниже и составил от 0,6% до 15,3%. Все задания повышенного и высокого уровня сложности оказались с процентом выполнения ниже 15, что говорит о невысоком качестве знаний выпускников как 2021 года, так и 2022 года.

Экзаменационная работа выявила уровень предметных знаний и умений, сформированный у девятиклассников образовательных организаций региона.

При выполнении алгебраических заданий №№ 1-14 экзаменуемые выполняли вычисления и преобразования, практические расчеты по формулам, решали уравнения, задания с графиками реальных зависимостей, анализировали статистические данные. При выполнении экзаменационной работы допускали ошибки в решении текстовых задач, задач на нахождения вероятности случайного события, в задачах, связанных с функциями и их графиками, а также в практико-ориентированных заданиях №1-№5, являющихся новым типом заданий с 2021 года.

При выполнении геометрических заданий №№ 15-19 экзаменуемые выполняли задания на определение ошибочных заключений, используя теоретический материал по геометрии, решали задачи на вычисление площадей, на нахождение неизвестных элементов геометрической фигуры. При выполнении экзаменационных заданий допускали вычислительные ошибки, проявляли невнимательность при чтении заданий, неверно использовали понятие вписанных фигур в окружность.

Наиболее высокий уровень (от 80% и выше процентов) продемонстрирован учащимися при выполнении заданий:

- №1 (процент выполнения 88,2%) в которой учащиеся должны были продемонстрировать умение использовать приобретенные знания и умения в практической деятельности и повседневной жизни (заполнить таблицы по тексту задачи);
- № 7 (процент выполнения 88,4%), где необходимо было выполнять вычисления и преобразования (работать с координатной прямой);
- №15 (процент выполнения 84,6%), где учащиеся должны были продемонстрировать умение решать геометрическую задачу, в которой необходимо выполнять действия с геометрическими фигурами для нахождения внешнего угла при вершине треугольника;
- №18 (процент выполнения 86,4%), в которых учащиеся должны были продемонстрировать умение выполнять действия с геометрическими фигурами на клетчатой бумаге, находя площадь параллелограмма.

Достаточно хорошо (от 61% до 79%) обучающиеся справились со следующими заданиями:

- №5 (процент выполнения 61,2%), в которой учащиеся должны были продемонстрировать умение использовать приобретенные знания и умения в практической деятельности и повседневной жизни, выбрав более дешевый набор продуктов;
- №6 (процент выполнения 79,2%), в которой учащиеся должны были находить значения выражения, используя сложения обыкновенных дробей;
- №9 (процент выполнения 64,9%), в которой учащиеся должны были показать умение решать квадратное уравнение;
- №10 (процент выполнения 74,0%), в которой учащиеся должны были продемонстрировать навыки вычисления вероятности случайного события;
- №11 (процент выполнения 64,0%), где учащиеся должны были показать умение устанавливать соответствие между знаками коэффициентов и графиками квадратичных функций;
- №12 (процент выполнения 68,7%), в которой учащиеся должны были продемонстрировать навыки проведения практических расчетов по формулам;
- №13 (процент выполнения 61,9%), в которой учащиеся должны были продемонстрировать навыки решения неравенств и их систем;
- №14 (процент выполнения 61,0%), где учащиеся должны были показать умение строить и исследовать простейшие математические модели при выполнении теоретической задачи;
- №17 (процент выполнения 67,8%) - решать простейшие геометрические задачи, в которых необходимо использовать навыки нахождения большего угла трапеции;
- №19 (процент выполнения 61,2%), в которой учащиеся должны были продемонстрировать умение на основе знаний теоретического материала по геометрии определить верные заключения.

Средний уровень (процент выполнения от 50% до 60%) продемонстрировали экзаменуемые при выполнении следующих заданий.

- №2 (процент выполнения 55,8%) и №3 (процент выполнения 54,7%), где учащиеся должны были показать умение использовать в практической деятельности и повседневной жизни, приобретённые знания и навыки.

Низкий уровень (ниже 50%) предметных знаний и умений показан экзаменуемыми при выполнении заданий:

- №4 (процент выполнения 23,7%), где учащиеся должны были показать умение использовать в практической деятельности и повседневной жизни, приобретённые знания и навыки (работа с текстом и рисунком). Следует отметить, что процент выполнения аналогичного задания в 2021 году был незначительно выше и составил 25, 2%;
- №16 (процент выполнения 46,2%), где учащиеся должны были продемонстрировать умение решать геометрическую задачу, в которой необходимо было найти длину стороны квадрата, вписанного в окружность. Следует отметить, что процент выполнения аналогичного задания в 2021 году был ниже и составил 39,8%.

Результаты выполнения заданий базового уровня дают возможность выявить тот круг умений и навыков, отработка которых требует большего внимания в процессе обучения в 7-9 классах. В связи с этим следует больше внимания на уроках алгебры уделять числовой последовательности, решению неравенств, целенаправленно развивать вычислительные навыки учащихся, на уроках геометрии обратить внимание на нахождение компонентов геометрических фигур. Также при анализе выполнения работы выявлены темы, которые требуют более тщательной отработки на уроках математики, на дополнительных занятиях. Результаты свидетельствуют о наличии проблемных зон в подготовке обучающихся: отсутствие навыков самоконтроля, проявляющееся в том, что обучающиеся невнимательно читают условие задания и в результате выполняют не то, что требовалось, не проверяют свой ответ, не оценивают его с точки зрения соответствия условию.

Анализ выполнения заданий №20-№25 части 2 (повышенный и высокий уровни сложности) показывает, что у обучающихся недостаточно отработаны умения применять свои знания в измененной ситуации, используя при этом известные из школьного курса методы. Процент выполнивших задания с развернутым ответом по итогам ОГЭ и мониторинга, представлен в таблице:

| | **ОГЭ 2019** | **ОГЭ 2021** | **ОГЭ 2022** |
|---|---|---|---|
| **Задание 20** | 15,3% | 12,4% | 7,0% |
| **Задание 21** | 5,1% | 8,7% | 9,3% |
| **Задание 22** | 6,5% | 1,8% | 1,4% |
| **Задание 23** | 14,7% | 6,1% | 3,5% |
| **Задание 24** | 2,1% | 5,6% | 2,1% |
| **Задание 25** | 0,6% | 0,1% | 0,2% |

Результаты, полученные учащимися, показывают, что процент выполнения заданий с развернутым ответом №20, №22, №23, №24, № 25 на итоговой аттестации в 2022 г. оказался ниже, чем в 2021 г. и 2019 г.

Процент выполнения задания №21 в 2022 году оказался незначительно выше, чем в предыдущие годы. Таким образом, выпускники текущего года продемонстрировали более высокий уровень умения решать текстовые задачи на различные виды движения и геометрические задачи на доказательство.

Анализ работ позволил выявить наиболее типичные ошибки, которые допускали экзаменуемые при решении заданий с развернутым решением.

Задача 20. В данном задании учащимся необходимо было неравенство вида $(x-6)^2 < \sqrt{10}(x-6)$.

Задание было направлено на проверку владения формально-оперативными умениями на уровне, несколько превышающем базовый, что является важной характеристикой учащихся, претендующих на повышенную оценку. С заданием справились:

| год | 2019 г. | 2021г. | 2022 г. |
|---|---|---|---|
| процент выполнения задания | 15,3 | 12,4 | 7 |

При решении задачи №20 учащиеся допускали:
-вычислительные ошибки;
-ошибки при выборе способа решения;
-ошибки при разложении на множители;
-ошибки при вынесение общего множителя за скобки;
-ошибки определения промежутков при решении неравенства методом интервалов.

Задача 21. Учащимся было предложено решить текстовую задачу вида:
«Баржа прошла по течению реки 56 км и, повернув обратно, прошла ещё 54 км, затратив на весь путь 5 часа. Найдите собственную скорость баржи, если скорость течения реки равна 5 км/ч.»

Решение текстовых задач традиционно вызывает трудности даже у «сильных» учащихся. Наибольшие трудности в составлении дробно-рационального уравнения, его решении и выборе правильного ответа. С задачей справились:

| год | 2019 г. | 2021г. | 2022 г. |
|---|---|---|---|
| процент выполнения задания | 5,1 | 8,7 | 9,3 |

При решении задачи №21 учащиеся допускали ошибки следующих типов:
-при составлении математической модели обучающиеся не указывали наименования (время, скорость, путь) или указывали их частично;
-некоторые обучающиеся не смогли обосновать (пояснить) составление математической модели (дробно-рационального уравнения);
-при решении дробно-рационального уравнения экзаменуемые не учитывали область допустимых значений переменной (или не выполняли проверку полученных значений переменной);
- допускали вычислительные ошибки;
- не указывали ответ на вопрос задачи.

Задача 22. Алгебраическое задание высокого уровня сложности, в котором необходимо:
- построить графика функции $y = 3 - \frac{x+5}{x^2+5x}$ и определите, при каких значениях $m$ прямая $y = m$ не имеет с графиком общих точек.

С заданием справилось:

| год | 2019 г. | 2021г. | 2022 г. |
|---|---|---|---|
| процент выполнения задания | 6,5 | 1,8 | 1,4 |

Наиболее распространенные ошибки:
-при построении графика функции, содержащего переменную, неверно выполнялось преобразование функции;
- допускались вычислительные ошибки в нахождении точек гиперболы;
-допускались вычислительные ошибки в нахождении дополнительных точек графика функции;
-допускались ошибки при построении гиперболы;
-ошибки при определении значения параметра.

На экзамене учащимся были предложены следующие геометрические задачи.

Задача 23.

«Точка $H$ является основанием высоты $BH$, проведённой из вершины прямого угла $B$ прямоугольного треугольника $ABC$. Окружность с диаметром $BH$ пересекает стороны $AB$ и $CB$ в точках $P$ и $K$ соответственно. Найдите $PK$, если $BH = 12$.»

С геометрической задачей на «вычисление» справились:

| год | 2019 г. | 2021г. | 2022 г. |
|---|---|---|---|
| процент выполнения задания | 14,7 | 6,1 | 3,5 |

Основные трудности, с которыми столкнулись учащиеся:

- неверное использование свойства прямоугольного треугольника при нахождении острого угла;
- не знание свойств углов, вписанных в окружность;
- вычислительные ошибки.

Задача 24.

«Окружности с центрами в точках $I$и $J$не имеют общих точек, и ни одна из них не лежит внутри другой. Внутренняя общая касательная к этим окружностям делит отрезок, соединяющий их центры, в отношении $m:n$. Докажите, что диаметры этих окружностей относятся как $m:n$».

Задачу на «доказательство» выполнили:

| год | 2019 г. | 2021г. | 2022 г. |
|---|---|---|---|
| процент выполнения задания | 2,[illegible] | 5,6 | 2,1 |

Типичный недостаток, который допускали учащиеся, состоял в неумении правильно и в полном объёме обосновать доказываемое утверждение.

Задача 25.

«Боковые стороны $AB$ и $CD$ трапеции $ABCD$равны соответственно 40 и 41, а основание $BC$ равно 16. Биссектриса угла $ADC$ проходит через середину стороны $AB$. Найдите площадь трапеции».

Самая сложная геометрическая задача экзаменационной работы ориентирована на учащихся, имеющих достаточно высокий уровень математической подготовки и владеющих свойствами геометрических фигур, наиболее часто встречающихся в задачах школьного курса планиметрии.

С задачей справились:

| год | 2019 г. | 2021г. | 2022 г. |
|---|---|---|---|
| процент выполнения задания | 0,6% | 0,1% | 0,2% |

Основные трудности, с которыми столкнулись учащиеся:

- недостаточные обоснования при доказательстве подобия треугольников;
- ошибки в применении признаков подобия треугольников;
- вычислительные ошибки.

Результаты, полученные экзаменуемыми, и анализ их работ, показывает, что процент выполнения заданий повышенного и высокого уровней сложности, предполагающих свободное владение материалом курса математики, находится на невысоком уровне.

**ВЫВОДЫ об итогах анализа выполнения заданий, групп заданий:**

Проведенный анализ показал, что перечень элементов умений, усвоение которых школьниками региона в целом можно считать **достаточным на базовом уровне**:

– Уметь выполнять вычисления и преобразования;
– Уметь выполнять действия с простейшими геометрическими фигурами.

Перечень элементов умений, усвоение которых школьниками региона в целом **нельзя считать достаточным на базовом уровне:**

– Уметь использовать приобретенные знания и умения в практической деятельности и повседневной жизни;
– Уметь строить и исследовать простейшие математические модели;
– Уметь выполнять действия с геометрическими фигурами при выполнении задач на «доказательство».

Следует отметить, что выпускники текущего года из-за эпидемиологической обстановки оказались в неравных условиях с выпускниками предыдущих лет. При обучении выпускников в 8 и 9 классах (2020-2021г.г.) применялись частично элементы дистанционных образовательных технологий, что оказало влияние на результат:

- недостаточная самоподготовка обучающихся по математике дома;
- занятия в кабинетах, не приспособленных для преподавания предмета «Математика»;
- большое количество пропущенных уроков или не проведенных по причине болезни детей или учителя;
- недостаточное внимание к геометрическим задачам на доказательство и отсутствие заключительного повторения планиметрии;
- неумение проводить анализ условия, искать пути решения, применять известные алгоритмы в измененной ситуации (стандартные методы решения простейших уравнений и неравенств, преобразование алгебраических выражений, свойства геометрических фигур при решении планиметрических задач);
- недостаточно количество решенных задач и разобранных методов решения задач с параметрами;
- часть основных тем была изучена в основном учениками самостоятельно во время дистанционного обучения (главная проблема оценивания на дистанционном обучении – необъективность, связанная с тем, что невозможно установить степень самостоятельности работы учеников при выполнении заданий).

### 3.3. Методические рекомендации по выполнению заданий с развернутым ответом ОГЭ

Приведём решение и критерии оценивания заданий с развернутым ответом вариантов КИМов ОГЭ по математике первого и второго дня основной волны.

**Задание 20 (первый день).**

Решите неравенство $(x-6)^2 < \sqrt{10}(x-6)$.

***Решение.***

Перенесём слагаемые в одну сторону, вынесем общий множитель $(x-6)$ за скобки и получим:

$$(x-6)^2 - \sqrt{10}(x-6) < 0, \quad (x-6)\left(x-6-\sqrt{10}\right) < 0.$$

Решим неравенство методом интервалов. Для этого найдём нули соответствующего уравнения ($x = 6$, $x = 6+\sqrt{10}$), отметим полученные числа на числовой оси и расставим знаки выражения $(x-6)\left(x-6-\sqrt{10}\right)$:


Таким образом, решением исходного неравенства являются $x$, удовлетворяющие неравенству $6 < x < 6 + \sqrt{10}$.

*Ответ:* $(6; 6 + \sqrt{10})$.

**Задание 20 (второй день).**

Решите уравнение $x(x^2 + 4x + 4) = 3(x + 2)$.

***Решение.***

Воспользуемся формулой сокращенного умножения

$$(x^2 + 4x + 4) = (x + 2)^2$$

и, перенеся слагаемые в левую часть уравнения, вынесем общий множитель $(x + 2)$ за скобки:

$$x(x + 2)^2 - 3(x + 2) = 0, \quad (x + 2)(x(x + 2) - 3) = 0,$$
$$(x + 2)(x^2 + 2x - 3) = 0.$$

Данное равенство справедливо, если

$$x + 2 = 0 \quad \text{или} \quad x^2 + 2x - 3 = 0$$
$$x_1 = -2 \qquad \frac{D}{4} = 1^2 - 1 \cdot (-3) = 4 = 2^2 > 0,$$
$$x_2 = -1 - 2 \quad \text{или} \quad x_3 = -1 + 2$$
$$x_2 = -3 \qquad x_3 = 1.$$

Итак, исходное уравнение имеет три решения: $-3, -2, 1$.

*Ответ:* $-3, -2, 1$.

| Содержание критерия | Баллы |
|---|---|
| Обоснованно получен верный ответ | 2 |
| Решение доведено до конца, но допущена ошибка вычислительного характера, с её учётом дальнейшие шаги выполнены верно | 1 |
| Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше | 0 |
| *Максимальный балл* | 2 |

**Задание 21 (первый день).**

Баржа прошла по течению реки 56 км и, повернув обратно, прошла ещё 54 км, затратив на весь путь 5 часов. Найдите собственную скорость баржи, если скорость течения реки равна 5 км/ч.

***Решение.***

Пусть $x$ км/ч – собственная скорость баржи, тогда $(x + 5)$ км/ч – скорость баржи по течению реки, а $(x - 5)$ км/ч – скорость баржи против течения реки. Время, затраченное баржей на путь в 56 км по течению реки и 54 км против течения реки, составит $\left(\frac{56}{x+5} + \frac{54}{x-5}\right)$ ч или 5 ч по условию задачи. Составим уравнение.

**Уравнение.**

**По условию задачи $x > 5$**

$$\frac{56}{x+5}+\frac{54}{x-5}=5, \quad \frac{56}{x+5}+\frac{54}{x-5}-5=0,$$

$$\frac{56(x-5)+54(x+5)-5(x-5)(x+5)}{(x-5)(x+5)}=0,$$

$$\begin{cases} 56x-280+54x+270-5x^2+125=0, \\ (x-5)(x+5)\neq 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} -5x^2+110x+115=0, \\ x\neq -5, \\ x\neq 5. \end{cases}$$

Решим квадратное уравнение $x^2-22x-23=0$, найдя дискриминант, делённый на четыре:

$$\frac{D}{4}=(-11)^2-1\cdot(-23)=121+23=144=12^2>0.$$

Квадратное уравнение имеет два различных корня:

$$x_1=11-12 \quad \text{или} \quad x_2=11+12$$
$$x_1=-1 \qquad\qquad x_2=23.$$

Первый корень $x_1=-1$ не удовлетворяет условию задачи $x>5$, поэтому собственная скорость баржи равна 23 км/ч.

*Ответ:* 23 км/ч.

**Задание 21 (второй день).**

Первые 330 км автомобиль ехал со скоростью 110 км/ч, следующие 105 км – со скоростью 35 км/ч, а последние 150 км – со скоростью 50 км/ч. Найдите среднюю скорость автомобиля на протяжении всего пути.

***Решение.***

Среднюю скорость автомобиля можно найти, разделив длину всего пути, пройденного им на время, затраченное на этот путь. Весь путь, который проехал автомобиль, составит

$$330+105+150=585\ (\text{км}).$$

Время, за которое был пройден путь в 585 км, будет равно

$$\frac{330}{110}+\frac{105}{35}+\frac{150}{50}=9\ (\text{ч}).$$

Следовательно, средняя скорость автомобиля на протяжении всего пути равна

$$\frac{585}{9}=65\ (\text{км/ч}).$$

*Ответ:* 65 км/ч.

| Содержание критерия | Баллы |
|---|---|
| Ход решения задачи верный, получен верный ответ | 2 |
| Ход решения верный, все его шаги присутствуют, но допущена ошибка вычислительного характера | 1 |
| Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше | 0 |

| Содержание критерия | Баллы |
|---|---|
| *Максимальный балл* | 2 |

**Задание 22 (первый день).**

Постройте график функции

$$y = 3 - \frac{x+5}{x^2+5x}.$$

Определите, при каких значениях $m$ прямая $y = m$ не имеет с графиком общих точек.

***Решение.***

Выясним, в каких точках функция

$$y = 3 - \frac{x+5}{x^2+5x} \qquad (1)$$

не определена:

$$x^2 + 5x \neq 0, \quad x(x+5) \neq 0,$$
$$x \neq 0 \quad \text{и} \quad x \neq -5.$$

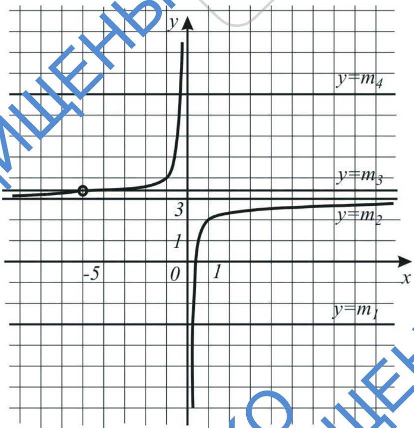
Выполним тождественные преобразования алгебраического выражения для функции (1) при $x \neq 0$ и $x \neq -5$:

$$3 - \frac{x+5}{x^2+5x} = 3 - \frac{x+5}{x(x+5)} = 3 - \frac{1}{x}.$$

Графиком функции $y = 3 - \frac{1}{x}$ является гипербола с выколотой точкой $\left(-5; 3\frac{1}{5}\right)$. Составим таблицу значений данной функции

| $x$ | $-4$ | $-3$ | $-2$ | $-1$ | $-\frac{1}{2}$ | $-\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{2}$ | $1$ | $2$ | $3$ | $4$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | $3\frac{1}{4}$ | $3\frac{1}{3}$ | $3\frac{1}{2}$ | $4$ | $5$ | $6$ | $0$ | $1$ | $2$ | $2\frac{1}{2}$ | $2\frac{2}{3}$ | $2\frac{3}{4}$ |

и построим график по этим точкам




Прямая $y = m$ параллельна оси $Ox$, поэтому:

1) при $m < 3$ прямая $y = m$ имеет с графиком функции (1) одну общую точку ($y = m_1$);

2) при $m = 3$ у графика функции (1) и прямой $y = m$ нет точек пересечения ($y = m_2$);

3) при $3 < m < 3\frac{1}{5}$ у прямой $y = m$ и графика функции (1) есть единственная точка пересечения;

4) при $m = 3\frac{1}{5}$ функция (1) не имеет общих точек с прямой $y = m$ ($y = m_3$);

5) при $m > 3\frac{1}{5}$ прямая $y = m$ пересекает график функции (1) в одной точке ($y = m_4$).

Итак, при $m = 3$ и $m = 3\frac{1}{5}$ прямая $y = m$ не имеет с графиком функции (1) общих точек.

*Ответ:* $3,\ 3\frac{1}{5}$.

**Задание 22 (второй день).**

Постройте график функции

$$y = \frac{2{,}5|x| - 1}{|x| - 2{,}5x^2}.$$

Определите, при каких значениях $k$ прямая $y = kx$ не имеет с графиком общих точек.

***Решение.***

Согласно определению модуля

$$|x| = \begin{cases} x & \text{при} \quad x \geq 0, \\ -x & \text{при} \quad x < 0, \end{cases}$$

поэтому исходная функция может быть преобразована следующим образом:

1) при $x \geq 0$:

$$y = \frac{2{,}5x - 1}{x - 2{,}5x^2}, \quad y = \frac{2{,}5x - 1}{-x(2{,}5x - 1)}, \quad y = -\frac{1}{x},$$

где $2{,}5x - 1 \neq 0$, $2{,}5x \neq 1$, $x \neq \frac{1}{2{,}5}$ или $x \neq 0{,}4$;

1) при $x < 0$:

$$y = \frac{-2{,}5x - 1}{-x - 2{,}5x^2}, \quad y = \frac{-(2{,}5x + 1)}{-x(2{,}5x + 1)}, \quad y = \frac{1}{x},$$

где $2{,}5x + 1 \neq 0$, $2{,}5x \neq -1$, $x \neq -\frac{1}{2{,}5}$ или $x \neq -0{,}4$.

Таким образом, исходная функция может быть переписана следующим образом:

$$y = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & \text{при} \quad x < 0, \\ -\dfrac{1}{x} & \text{при} \quad x > 0, \end{cases}$$

где $x \neq -0{,}4$ и $x \neq 0{,}4$.

Графиком функций $y = \frac{1}{x}$, где $x \neq -0{,}4$, $x < 0$, и $y = -\frac{1}{x}$, где $x \neq 0{,}4$, $x > 0$ являются ветви гиперболы с выколотыми точками $(-0{,}4;\ -2{,}5)$ и $(0{,}4;\ -2{,}5)$. Составим таблицы значений функций $y = \frac{1}{x}$ при $x < 0$ и $y = -\frac{1}{x}$ при $x > 0$:

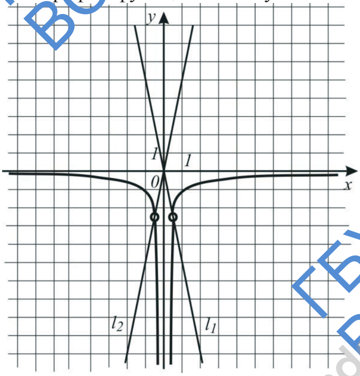
| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | $-4$ | $-3$ | $-2$ | $-1$ | $-\frac{1}{2}$ | $-\frac{1}{3}$ | $-\frac{1}{4}$ |

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | $-\frac{1}{4}$ | $-\frac{1}{3}$ | $-\frac{1}{2}$ | $-1$ | $-2$ | $-3$ | $-4$ |

и

| $x$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{2}$ | $1$ | $2$ | $3$ | $4$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | $-4$ | $-3$ | $-2$ | $-1$ | $-\frac{1}{2}$ | $-\frac{1}{3}$ | $-\frac{1}{4}$ |

Строим график функции по полученным точкам:




Прямая $y = kx$ не имеет с графиком исходной функции общих точек, если либо совпадает с осью $Ox$ (при $k = 0$), либо проходит через выколотую точку $(-0{,}4;\ -2{,}5)$ (прямая $l_1$) или выколотую точку $(0{,}4;\ -2{,}5)$ (прямая $l_2$), то есть если справедливы равенства:

$$-2{,}5 = k \cdot 0{,}4 \quad \text{или} \quad -2{,}5 = k \cdot (-0{,}4)$$

$$k = \frac{-2{,}5}{0{,}4} \qquad\qquad k = \frac{-2{,}5}{-0{,}4}$$

$$k = -\frac{25}{4} \qquad\qquad k = \frac{25}{4}.$$

Итак, прямая $y = kx$ не пересекает график функции при $k$ равном либо $-\frac{25}{4}$, либо 0, либо $\frac{25}{4}$.

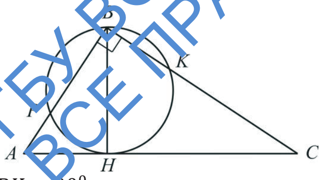
*Ответ:* $-\frac{25}{4}$, 0, $\frac{25}{4}$.

| **Содержание критерия** | **Баллы** |
|---|---|
| График построен верно, верно найдены искомые значения параметра | 2 |
| График построен верно, но искомые значения параметра найдены неверно или не найдены | 1 |
| Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше | 0 |
| *Максимальный балл* | 2 |

**Задание 23 (первый и второй день).**

Точка $H$ является основанием высоты $BH$, проведённой из вершины прямого угла $B$ прямоугольного треугольника $ABC$. Окружность с диаметром $BH$ пересекает стороны $AB$ и $CB$ в точках $P$ и $K$ соответственно. Найдите $PK$, если $BH = 12$.

***Решение.***




$\angle PBK = 90^0$ – вписан в окружность, значит $PK$ – диаметр этой окружности. По условию задачи $BH$ – диаметр той же окружности, поэтому $PK = BH = 12$.

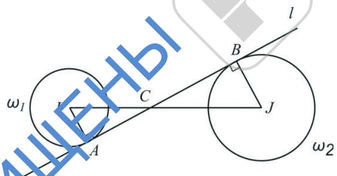
*Ответ:* 12.

| Содержание критерия | Баллы |
|---|---|
| Ход решения верный, все его шаги выполнены правильно, получен верный ответ | 2 |
| Ход решения верный, все его шаги выполнены правильно, но даны неполные объяснения или допущена одна вычислительная ошибка | 1 |
| Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше | 0 |
| *Максимальный балл* | 2 |

**Задание 24 (первый и второй день).**

Окружности с центрами в точках $I$ и $J$ не имеют общих точек, и ни одна из них не лежит внутри другой. Внутренняя общая касательная к этим окружностям делит отрезок, соединяющий их центры, в отношении $m:n$. Докажите, что диаметры этих окружностей относятся как $m:n$.

***Доказательство.***




1. Пусть $\omega_1$ и $\omega_2$ – окружности с центрами в точках $I$ и $J$, и диаметрами $d_1$ и $d_2$ соответственно; $l$ – внутренняя общая касательная окружностей $\omega_1$ и $\omega_2$; $A = \omega_1 \cap l$ и $B = \omega_2 \cap l$; $C = IJ \cap AB$, следовательно, $AC:CB = m:n$.

2. $IA$ и $JB$ – радиусы окружностей $\omega_1$ и $\omega_2$, соответственно, проведённые в точку касания с прямой $l$, значит $IA \perp l$ и $JB \perp l$.

3. $\Delta IAC$ и $\Delta JBC$ подобны по двум углам ($\angle IAC = \angle JBC = 90^0$ по доказанному, $\angle ICA = \angle JCB$ как вертикальные).

4. Из подобия $\Delta IAC$ и $\Delta JBC$ следует, что

$$\frac{IA}{JB} = \frac{AC}{CB} = \frac{m}{n}.$$

5. $d_1 = 2IA$, $d_2 = 2JB$, поэтому

$$\frac{d_1}{d_2} = \frac{2IA}{2JB} = \frac{IA}{JB} = \frac{m}{n}.$$

Таким образом доказано, что диаметры окружностей $\omega_1$ и $\omega_2$ и относятся как $m : n$.

| Содержание критерия | Баллы |
|---|---|
| Доказательство верное, все шаги обоснованы | 2 |
| Доказательство в целом верное, но содержит неточности | 1 |
| Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше | 0 |
| *Максимальный балл* | 2 |

**Задание 25 (первый день).**

Боковые стороны $AB$ и $CD$ трапеции $ABCD$ равны соответственно 40 и 41, а основание $BC$ равно 16. Биссектриса угла $ADC$ проходит через середину стороны $AB$. Найдите площадь трапеции.

***Решение.***

1. Пусть $E$ – точка пересечения биссектрисы угла $ADC$ и $AB$, тогда $AE = EB$ по условию задачи (рис. 1).

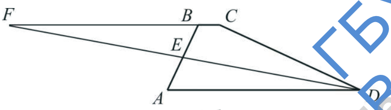



*рис. 1*

2. Продолжим прямую $DE$ до пересечения с прямой $BC$ в точке $F$.
3. $\angle ADF = \angle CFD$ как накрест лежащие при параллельных прямых $FC$, $AD$ и секущей $DF$.
4. $\Delta FCD$ – равнобедренный, так как $\angle CFD = \angle ADF = \angle FDC$ ($DF$ – биссектриса $\angle ADC$), значит $FC = CD = 41$.
5. $FB = FC - BC$, $FB = 41 - 16 = 25$.
6. $\Delta DAE = \Delta FBE$ по стороне и двум прилежащим к ней углам ($AE = EB$ по условию, $\angle AED = \angle BEF$ как вертикальные, $\angle DAE = \angle FBE$ как внутренние накрест лежащие при параллельных прямых $AD$, $CF$ и секущей $AB$.
7. Из равенства $\Delta DAE$ и $\Delta FBE$ получаем, что $AD = BF = 25$.
8. Проведём высоты $BP$ и $CQ$, значит $BCQP$ – прямоугольник, а $BP = CQ$ и $PQ = BC = 16$ (рис. 2).

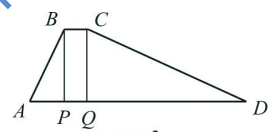



*рис. 2*

9. Пусть $x$ – длина отрезка $AP$, тогда $QD = AD - AP - PQ$, то есть $DQ = 25 - x - 16 = 9 - x$.
10. Из $\Delta APB$, где $\angle APB = 90^0$, $AB = 40$, $AP = x$, по теореме Пифагора находим:

$$BP^2 = AB^2 - AP^2, \quad BP^2 = 40^2 - x^2.$$

11. Из $\Delta CQD$, где $\angle CQD = 90^0$, $CD = 41$, $DQ = 9 - x$, по теореме Пифагора получаем, что:

$$CQ^2 = CD^2 - DQ^2, \quad CQ^2 = 41^2 - (9 - x)^2.$$

12. Зная, что $BP = CQ$, составим и решим уравнение

$$40^2 - x^2 = 41^2 - (9 - x)^2, \quad 40^2 - x^2 = 41^2 - 9^2 + 18x - x^2,$$

$$18x = 40^2 - 41^2 + 9^2, \quad 18x = (40 - 41)(40 + 41) + 81,$$

$$18x = -81 + 81, \quad 18x = 0, \quad x = 0,$$

тогда $BP = 40$.

13. $S_{ABCD} = \frac{1}{2}(AD + BC) \cdot BP$,

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2}(25 + 16) \cdot 40 = 41 \cdot 20 = 820.$$

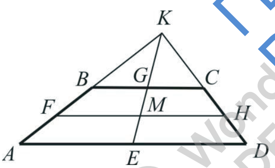
*Ответ:* 820.

**Задание 25 (второй день).**

Углы при одном из оснований трапеции равны $86^0$ и $4^0$, а отрезки, соединяющие середины противоположных сторон трапеции, равны 4 и 1. Найдите основания трапеции.

***Решение.***

1. Обозначим через $E$, $F$, $G$, $H$ – середины сторон $AD$, $AB$, $BC$, $CD$, трапеции $ABCD$, где $AD \parallel BC$, тогда $FH = 4$, $EG = 1$, $\angle BAD = 4^0$, $\angle CDA = 86^0$, $FH \cap GE = M$.




2. Продолжим прямые $AB$ и $CD$ до пересечения в точке $K$ и получим прямоугольный треугольник $AKD$ ($\angle KAD = 4^0$, $\angle KDA = 86^0$ по условию задачи).

3. $KE$ – медиана $\Delta AKD$, значит $M \in KE$, $G \in KE$ и $KG = \frac{1}{2}BC$, $KM = \frac{1}{2}FH$, $KM = 2$, $KE = \frac{1}{2}AD$.

4. Прямые $BC$, $FH$ и $AD$ параллельны, значит по теореме Фалеса $\frac{AF}{FB} = \frac{EM}{MG}$, поэтому $EM = MG = \frac{1}{2}$.

5. $KG = KM - MG$, $KE = KM + ME$, тогда $KG = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$ и $BC = 3$, а $KE = 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$ и $AD = 5$.

*Ответ:* 3, 5.

| Содержание критерия | Баллы |
|---|---|
| Ход решения задачи верный, получен верный ответ | 2 |
| Ход решения верный, все его шаги присутствуют, но допущена ошибка вычислительного характера | 1 |
| Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше | 0 |
| *Максимальный балл* | 2 |

### 3.4. Рекомендации по совершенствованию организации и методики преподавания предмета в основной школе

Результаты экзамена по математике позволили выявить ряд проблем, которые необходимо учитывать при обучении математике и подготовке обучающихся к итоговой аттестации в формате ОГЭ.

Важным условием успешной подготовки к экзамену является тщательность в отслеживании результатов учеников по всем темам и в своевременной коррекции уровня усвоения учебного материала. Одним из принципов построения методической подготовки к итоговой аттестации считается принцип «жесткого ограничения времени» при выполнении тестов. В целях эффективного использования времени на экзамене, нужно также учить школьников приемам быстрого и рационального счета. А также формирование читательской грамотности при работе с текстом как основной составляющей функциональной грамотности обучающихся: работа с рисунками, схемами, графиками, текстом, применении знаний на практике. Уделять внимание обучению работы с вопросами, вычленению ключевых теорий, на базе которых строятся ответы.

Низкий процент выполнения геометрических заданий, особенно заданий 16, 23, 24 свидетельствует о сохраняющихся системных недостатках в преподавании геометрии в основной школе. Также причиной является рассмотрение лишь тех типов задач, которые встречались на экзамене в предыдущие годы, вместо полноценного изучения геометрии. Таким образом, следует рекомендовать при подготовке к экзамену особое внимание уделить формированию и развитию умений выполнять действия с геометрическими фигурами, предлагать задания с разными числовыми данными по одному рисунку, предлагать задания, где необходимо определять различные элементы фигуры и/или вычислять их числовые характеристики, уделять больше внимания развитию умения верно пользоваться геометрическим чертежом, добиваться достаточного уровня владением теоретическим материалом.

При подготовке к экзамену особое внимание следует уделять решению задач, в которых необходимо составить математическую модель в виде уравнения или системы уравнений. Не менее важно отрабатывать навыки решения различных типов уравнений, встречающихся при решении подобного вида задач.

Несмотря на рост показателей выпускников, получивших полный балл за решение задания 21, следует рекомендовать при подготовке к экзамену обратить внимание на формирование вычислительных навыков учащихся, а также корректное использование данных задачи при составлении математической модели.

При подготовке к экзамену обратить внимание: на корректное выполнение всех преобразований необходимых при решении заданий высокого уровня сложности 22 и 25; на формирование математической культуры при решении задач, требующих доказательства или обоснования доказываемого утверждения или факта.

Одним из условий успешного обучения математике является правильный выбор учебника математики, при этом следует руководствоваться приказами Министерства Просвещения РФ «Об утверждении федерального перечня учебников, рекомендуемых к использованию при реализации имеющих государственную аккредитацию образовательных программ начального общего, основного общего, среднего общего образования»: № 254 от 20 мая 2020г. и № 766 от 23.12.2020. При выборе УМК следует обратить внимание на преемственность в обучении

На основании вышеизложенного, **рекомендуем** педагогам проанализировать результаты ОГЭ по математике на заседаниях городских (районных) методических объединений учителей математики; планировать работу на 2022-2023 учебный год с учетом:

- изучения нормативных документов Министерства Просвещения РФ, методических писем и рекомендаций ФИПИ http://www.fipi.ru/. В данных письмах и рекомендациях указаны нормативные требования к проведению ОГЭ, характеристика контрольных измерительных материалов по математике, рекомендации по использованию и интерпретации результатов выполнения экзаменационных работ;

- включения в учебный план общеобразовательной организации факультативных курсов (спецкурсов, индивидуальных занятий и т.п.), стимулирующие интерес к предмету и развивающие математические способности, начиная с 5 класса;

- использования «Открытый банк заданий ОГЭ. Математика», созданного авторским коллективом ФИПИ с целью подготовки учащихся к итоговой аттестации http://www.fipi.ru/;

- использование банка заданий по формированию математической грамотности ИСРО РАО http://skiv.instrao.ru/bank-zadaniy/matematicheskaya-gramotnost/;

- увеличения количества часов на изучение математики из части учебного плана, самостоятельно формируемой участниками образовательных отношений и (или) предусмотреть включение в учебный план общеобразовательной организации элективных курсов, направленных на подготовку обучающихся к сдаче государственной итоговой аттестации в 9 классах;

- выявление проблемных тем теоретического материала по математики за курс основной школы; организация индивидуальных и групповых занятий по восполнению пробелов в знаниях отдельных теоретических вопросов курса математики; на занятиях спецкурсов, консультациях продолжить отработку навыков практического применения теории; на уроках повторения пройденного материала уделить особое внимание вопросам и заданиям, вызвавшим затруднения у школьников;

- закрепление навыков смыслового чтения и анализа текста заданий (типа №1 - 35), т.к. у обучающихся недостаточно сформированы как читательская грамотность, так и умения использовать приобретённые знаний в практической деятельности и повседневной жизни;

- усиление внимания к геометрическим задачам на решение и доказательство; необходимо обратить самое внимание на изучение геометрии – непосредственно с 7 класса, когда начинается систематическое изучение этого предмета. Подготовку выпускников следует начинать не с рассмотрения примеров решения геометрических задач вариантов ОГЭ, а с изучения свойств геометрических фигур и их элементов. Задачи необходимо решать по темам, например, «Треугольник и его элементы» и т.д.;

- проведение анализа условия задачи, искать пути решения, применять известные алгоритмы в измененной ситуации (стандартные методы решения простейших уравнений и неравенств, преобразование алгебраических выражений, свойства геометрических фигур при решении планиметрических задач);

- рассмотрение разобранных методов решения задач с параметрами;

- усиление работы по повышению уровня вычислительных навыков учащихся (например, с помощью устной работы на уроках: применение арифметических законов действий при работе с рациональными числами, свойства степеней, корней и др.), что позволит им успешно выполнить задания, избежав досадных ошибок, применяя рациональные методы вычислений;

- повышение мотивации учащихся к самостоятельному изучению дополнительного материала, без которого трудно решить задания повышенного и высокого уровня сложности;

- отработка у обучающихся быстрое и правильное выполнение заданий Части 1, постоянно контролировать умения, необходимые для выполнения заданий базового уровня;

- организация дифференцированного подхода с наиболее подготовленными учащимися для успешного выполнения заданий Части 2. Это относится и к работе на уроке, и к дифференциации домашних заданий и заданий, предлагающихся обучающимся на контрольных, проверочных, диагностических работах.

Отбор учебного материала для повторения и закрепления изученного учебного материала необходимо осуществлять с учетом уровня подготовки обучающихся, уделяя наибольшее внимание традиционно сложным для усвоения темам. При этом целесообразно применять дифференцированный подход, при котором следует разделить обучающихся на группы:

- мотивированным обучающимся, полноценно усвоившим учебный материал, предлагать дополнительные вопросы, расширяющие содержание ранее изученного материала, тренировочные варианты для выполнения, проводить консультации по возникающим вопросам;

- обучающимся, допускающим индивидуальные ошибки при выполнении заданий КИМ работать над повторением и закреплением теории трудных тем, отработкой групп заданий из Открытого банка (Методические рекомендации для обучающихся по организации индивидуальной подготовки к ОГЭ по учебному предмету, представленных на официальном сайте ФИПИ http://www.fipi.ru/);

- обучающимся, с низким уровнем мотивации, испытавшим затруднения при усвоении ранее изученных тем, предлагать задания на повторение и закрепление ранее изученного материала, отработать задания до автоматизма из «Открытого банка заданий ОГЭ. Математика» (необходимо определить количество и тип заданий, выполнение которых обеспечит преодоление минимального порога).

По организации дифференцированного обучения школьников с разными уровнями предметной подготовки необходимо сделать акцент на индивидуальные особенности учащихся и включить в методическую работу поэтапное дифференцированное обучение:

- диагностический этап: первичная диагностика, которая позволит определить имеющийся уровень сформированности знаний, умений, навыков по предмету, а также сформированность предметных и метапредметных УУД обучающихся;

- содержательно-методический: выстраивание индивидуальной траектории по подготовке к ГИА, исходя из уровня подготовки обучающихся. Разработка теоретических и практических занятий, направленных на совершенствование и повышение уровня; разработка самооценочных диагностических инструментов, которые позволяют учащимся самостоятельно выстраивать свой образовательный маршрут. Предполагает организацию педагогического взаимодействия учитель-ученик (группа учеников);

- рефлексивный: обеспечение промежуточного контроля уровни готовности учащихся к сдаче экзамена по математике и корректировка индивидуального образовательного маршрута.

Одним из условий, влияющим на успешную подготовку к ОГЭ по математике является реализация индивидуального подхода в работе с учеником, планирующим сдавать экзамен. Для этого может быть использован график, который отражает порядок прохождения тем и результаты усвоения изученного материала, в том числе и выполнения заданий. Важнейшим фактором, определяющим успешную сдачу экзамена, является также формирование метапредметных результатов обучения.

Согласно ФГОС ООО, должны быть достигнуты не только предметные, но и метапредметные результаты обучения, в том числе смысловое чтение и способность к самостоятельному поиску методов решения практических задач.

Достижения этих результатов влияет на успешность выполнения заданий КИМ ОГЭ по математике, например, заданий №1 - №5, входящих в КИМ с 2021 года.

При выполнении практико-ориентированных задач, затруднения у обучающихся вызывают: способность моделировать, анализировать и преобразовывать информацию, работать с рисунком, таблицей, а также интерпретировать полученные результаты.

Следовательно, учителю необходимо формировать у обучающихся опыт поиска путей решения жизненных задач, учить математическому моделированию реальных ситуаций и переносить способы решения учебных задач на реальные объекты.

В каждой теме при изучении математики в основной школе в соответствии с кодификатором содержания выполнять задания, построенные на реальных жизненных сюжетах. Акцент – на обсуждение: обсуждение ситуации, выявление математических аспектов, всех данных, переформулирование и моделирование объектов, перевод на язык математики, обсуждение ограничений, допущений, различные способы решения, обсуждение их рациональности; обсуждение результатов: оценка и интерпретация, соотнесение с ситуацией.

В сложившихся условиях (дистанционное обучение, онлайн обучение) рекомендуется использовать возможности сетевого взаимодействия с обучающимися, организовать изучение тем и итоговое повторение на основе интерактивных уроков, используя образовательные платформы (https://эдо.образование33.рф и др.).

# ЧАСТЬ IV.
# МЕРЫ МЕТОДИЧЕСКОЙ ПОДДЕРЖКИ УЧИТЕЛЯ МАТЕМАТИКИ

## 4.1. Дорожная карта по развитию региональной системы образования на 2022-2023 учебный год

| № | Дата | **Мероприятие** *(указать тему и организацию, которая планирует проведение мероприятия)* |
|---|---|---|
| 1 | в тече-ние го-да | Разработка и проведение для учителей математики входного тестирования, направленного на проверку уровня профессиональной компетентности педагога на знание предмета. Тестирование проводилось в рамках курсовой подготовки слушателей курсов Владимирского института развития образования имени Л.И. Новиковой (ГАОУДПО ВО ВИРО) |
| 2 | в течение года | Организация и проведение по заявкам территорий и образовательных организаций репетиционного тестирования по математике для учащихся 11 классов, в формате ЕГЭ (подготовка контрольно-измерительный материалов, проведение консультаций с учащимися, проверка и анализ работ учащихся), ГАОУДПО ВО ВИРО |
| 3 | в течение года | Организация работы сообщества учителей математики http://wiki.vladimir.i-edu.ru (обсуждение вопросов, связанных с итоговой аттестацией обучающихся, представление опыта работы педагогов в разделе «Методическая копилка»), ГАОУДПО ВО ВИРО |
| 4 | в течение года | Обобщение и распространения опыта учителей математики успешно готовящих учащихся к итоговой аттестации по математике (с занесением опыта в банк данных ВИРО), https://viro33.ru/ |
| 5 | в течение года | Проведение учителями математики г. Владимира практических занятий для слушателей курсов повышения квалификации по подготовке обучающихся к итоговой аттестации: Дементьева О.И. – МБОУ СОШ №9, Шавлинская Т.Ю – МАОУ СОШ №25, Дубова Е.В. – МАОУ Гимназия №35 г. Владимира. |
| 6 | в течение года | Проведение курсов повышения квалификации для учителей математики региона на базе ГАОУ ДПО ВО ВИРО:<br>- краткосрочные курсы по теме «Методика подготовки учащихся к итоговой аттестации по математике» (очное обучение, март 2023 года, 36 часов) и в в дистанционной модели: https://довиро.образование33.рф/course/view.php?id=51 |
| 7 | 1 ноября 2022г. | Творческий конкурс для педагогов «Решение задач повышенной сложности». Информация о конкурсе размещена на странице http://wiki.vladimir.i-edu.ru/index.php?title=Конкурс_Решение_задач_повышенной_сложности |
| 8 | ноябрь 2022г. | Конкурс методических разработок учителей математики «Современный урок математике: функциональная грамотность», ГАОУДПО ВО ВИРО |
| 9 | март 2023 г. | Организация и проведение мониторинга качества образовательной подготовки обучающихся по математике в 11 классах. Мониторинг организуется кафедрой естественно-математического образования ГАОУДПО ВО ВИРО совместно с департаментом образования администрации Владимирской области. |

Возможные направления повышения квалификации учителей математики (очная, очно-заочная и дистанционные формы обучения):

1. Методика подготовки учащихся к государственной итоговой аттестации по математике (ОГЭ, ЕГЭ).
2. Методика изучения сложных тем курса математики старшей школы.
3. Методика изучения сложных тем курса математики основной школы.
4. Формирование математической грамотности как одной из составляющих функциональной грамотности школьников.
5. Практикумы по решению задач повышенного и высокого уровней сложности.

Сидорова И.В., Антонова Е.И., Жукова А.А., Данилов В.В.

Результаты
государственной итоговой
аттестации по математике

Технический редактор: В.Н. Васильева
Корректор: О.С. Говорухина
Оператор: Н.С. Орлов

Подписано в печать 26.10.2022.
Формат 60x90/16. Бумага офсетная. Гарнитура Times New Roman.
Уч.-изд. 3,96 л. Усл.-печ. 4,83 л. Заказ № 3015.10. Тираж 300.

Отпечатано в типографии ООО «Принт».
426035. г. Ижевск, ул. Тимирязева